Пособие по теории игр

Александр Цыплаков

28 августа 2008 г.

Оглавление

Введение

Что такое теория игр?

В нашей жизни постоянно возникают ситуации, в которых последствия решений, принимаемых одним человеком, зависят от того, какие решения принимают другие люди. Теория игр предоставляет инструментарий для анализа подобных ситуаций и дает возможность быть точным и последовательным при их обсуждении. При этом используются формальные абстрактные конструкции — модели, которые называются **играми** (отсюда и название дисциплины). Модели и понятия теории игр позволяют понять, как происходит стратегическое взаимодействие нескольких субъектов (конфликт, сотрудничество и т. п.). В основе теории игр лежат предположения о том, что рассматриваемые субъекты имеют некоторые цели, являются в определенном смысле рациональными и при принятии собственных решений мыслят стратегически, то есть учитывают внутреннюю структуру ситуации и то, какие решения могут принимать другие.

Теория игр может использоваться для анализа широкого круга явлений. Понятия и результаты теории игр доказали свою полезность при анализе социально-экономических явлений и находят растущее применение в экономической теории. Фактически, к настоящему времени теория игр стала стандартным инструментом экономической теории, что подтверждается, в частности, несколькими нобелевскими премиями, полученными за исследования в области теории игр и информационной экономики.

Содержание пособия

Цель данного пособия — познакомить студентов с базовыми понятиями и результатами современного теоретико-игрового моделирования, и его применениями в экономике, социальных науках и других областях. В результате изучения курса студенты должны приобрести такой уровень навыков, который даст им возможность понимать многие модели, используемые в научных статьях по прикладным разделам экономической теории.

От читателя требуется наличие базовых знаний по курсам математического анализа и теории вероятностей, а также знакомство с основами микро- и макроэкономики.

В данном пособии в качестве введения в теорию игр излагаются основы теории принятия решений, в частности, принятия решений в условиях риска. Большая часть курса посвящена теории некооперативных игр, центральное место в которой занимает понятие равновесия Нэша. Часть курса посвящена также теории кооперативных игр (Парето-оптимальность, ядро).

Поскольку курс вводный, то не планируется использовать абсолютно строгую формализацию материала. В основном понятия и результаты вводятся с помощью примеров, относящихся к экономическим, политическим, правовым и другим явлениям, включающим взаимодействие людей. В то же время, важно подчеркнуть, что теория игр — дисциплина исключительно аналитическая, имеет в основе строгие математические построения и требует абстрактных, дедуктивных рассуждений. Поэтому по мере возможности в пособии даются достаточно аккуратные словесные формулировки, не искажающие соответствующее формальное содержание.

Для надежного освоения основ теории игр требуется самостоятельно выполнить большое количество практических упражнений. Предполагается, что вместе с данным пособием будет использоваться и задачник по теории игр, который был подготовлен параллельно с ним. Кроме того, по всему тексту пособия встречаются вставки с дополнительными вопросами и задачами, позволяющими более глубоко осмыслить обсуждаемые идеи.

Глава 1

Теория принятия решений (индивидуальный рациональный выбор)

Теория принятия решений и рациональный выбор. Структура проблемы принятия решений. Альтернативы, исходы, выигрыши, (чистые) стратегии. Одномерная оптимизация. Дерево решений. Межвременные предпочтения и дисконтирование. Свертывание дерева решений с помощью обратной индукции (динамическое программирование). Случайные ходы, смешанные стратегии. Случайные ходы природы, игры с природой. Теория ожидаемой полезности Неймана—Моргенштерна, ожидаемый выигрыш. Байесовское принятие решений.

1.1. Введение

Теория игр предполагает рассмотрение разнообразных ситуаций столкновения интересов, действий, которые игроки предпринимают в подобных ситуациях и тех исходов, которые реализуются в результате. При этом предполагается, что у каждого игрока есть определенные предпочтения по отношению к исходам, то есть он может сравнивать исходы и решать, какие для него более, а какие менее предпочтительны. Таким образом, если отвлечься от взаимодействия игрока с другими игроками, а ограничиться лишь его собственными действиями и возникающими исходами, то здесь не обойтись без анализа индивидуального выбора, то есть без анализа того, какой выбор сделает игрок, если ему будет предложен некоторый набор альтернатив. Эта задача об индивидуальном принятии решений является основой всех рассуждений в теории игр. Поэтому прежде чем перейти к собственно теории игр, мы рассмотрим основные понятия, связанные с выбором и принятием решений.

Разумная человеческая деятельность в большинстве случаев состоит в том, что человеку для достижения тех или иных целей приходится принимать решения (делать выбор). Выбор состоит в сравнении достоинств нескольких альтернатив (вариантов действий) и выделении какой-то одной из этих альтернатив. Люди постоянно производят выбор в течении жизни:

- какие товары купить в магазине и в каком количестве;
- за кого выйти замуж (на ком жениться);
- в каком банке открыть счет;
- какую передачу смотреть по телевизору;
- выбрать ли тот или иной маршрут поездки.

Очень многие важные решения принимаются людьми на их рабочем месте, будь то коммерческая фирма или государственная организация.

При этом вполне естественно стремление принимать *оптимальные* решения, которые в наибольшей степени реализуют поставленные цели и в наибольшей степени соответствуют предпочтениям. Постановки вопроса о выборе оптимальных решений встречаются в различных теоретических и прикладных дисциплинах — медицине, праве, военном деле, экономике, технике и т. д. По мере развития и математизации этих дисциплин соответствующие процессы принятия решений получали математическое описание посредством формальных моделей. Соответствующую дисциплину принято называть теорией принятия решений.

Математические теории принятия решений можно классифицировать по трем основным признакам:

временной горизонт — статическое или динамическое принятие решений;

знание обстановки — принятие решений в условиях неопределенности (риска) или определенности;

количество участников — решение одного индивидуума или нескольких лиц (в этом заключается основное отличие между собственно теорией принятия решений и теорией игр).

1.2. Рациональность

Обычно экономический анализ исходит из «рациональности» лиц, принимающих решение. Теория рационального выбора является фундаментом современной экономики и активно используется в других социальных науках. Теория рационального выбора подразумевает, что при данных целях и предпочтениях выбор индивидуумов определяется тем, каким образом лучше всего эти цели осуществить, учитывая окружающую обстановку и ограничения, в рамках которых они действуют.

Предполагается наличие у индивидуума предпочтений, то есть индивидуум знает, какая альтернатива для него лучше, а какая хуже. Эти предпочтения предполагаются «рациональными». Формально это означает, что они являются полными и транзитивными (об этом ниже). При этом индивидуум всегда может выбрать альтернативу из произвольного конечного множества альтернатив и его выбор оказывается непротиворечивым.

Кроме того предполагается, что индивидуум принимает решения...

1. формируя некоторые представления о мире;
2. выбирая действия, которые являются в некотором смысле наилучшими при данных представлениях.

Зачастую при этом делаются различные упрощающие предположения, которые не всегда реалистичны.

- Индивидуум обладает точной информацией о том, что произойдет в результате выбора той или иной альтернативы.
- Индивидуум обладает способностью сравнивать любые альтернативы между собой.
- Индивидууму известны все имеющиеся альтернативы.

Такой подход часто критикуют по самым разным направлениям. Скептики утверждают, что индивидуумы не способны осуществлять полностью рациональный выбор, поскольку их ослепляют страсти, эмоции или другие силы, которые ими управляют. Даже когда индивидуум свободен от действия таких сил, его познавательные и интеллектуальные способности ограничены, что не позволяет достичь оптимальности, предписываемой рациональным выбором.

По-видимому, не существует единственного удовлетворительного ответа на эту критику. Ни один теоретик рационального выбора не стал бы с серьезным видом утверждать, что его теория — это точное описание того, как индивидуумы осуществляют выбор. Однако имеется несколько возможных линий защиты этой позиции.

Даже если индивидуумы не могут быть вполне рациональными, они к этому стремятся. Когда им указывают на иррациональность их поведения, они обычно пытаются исправиться, с тем чтобы более успешно достигать своих целей. Поэтому рациональный выбор, хотя и не отражает вполне адекватно поведение отдельного индивидуума, но отражает то, на что индивидуум ориентируется. Это особенно верно для конфликтных и конкурентных ситуаций — по мере того как наши противники и конкуренты совершенствуются, мы платим все большую цену за то, что не совершенствуем свои собственные процедуры принятия решения.

Имеет место эффект передачи рациональности. Мы не можем быть все полностью рациональными, но, в соответствующей обстановке, рациональность нескольких может влиять на поведение многих.

Вполне может быть, что рациональный выбор — это неадекватное предположение для одних явлений и адекватное для других. Но единственный способ выяснить это — попробовать использовать то или иное предположение и посмотреть, «окупается» оно или нет.

Очень важно, что обсуждение недостатков теории рационального выбора не ведет само по себе к хорошей теории. В данном случае по крайней мере мы имеем исходную точку, от которой можем стартовать.

1.3. Предпочтения и выбор в простой ситуации

Рассмотрим сначала самый простой вид принятия решений — индивидуальное принятие решений в статике и в условиях определенности.

Ситуация принятия решения — это ситуация, в которой отдельный индивидуум (**лицо, принимающее решение**) выбирает из нескольких вариантов действий, которые ведут к различным исходам. **Действие** — это то, что лицо, принимающее решение, может сделать в данной ситуации.

Исход — это тот результат, к которому приводит процесс принятия решений. (В теории игр — это та ситуация, которая возникает после окончания игры.) При этом из общего описания ситуации следует вычленить только те аспекты, которые являются существенными, т. е. такие аспекты, которые

- отличают исходы друг от друга;
- важны для лица, принимающего решение.

Например, индивидууму на выбор предлагают мандарин или грушу. Действие индивидуума будет состоять в том, чтобы произнести «я возьму грушу» или «я возьму мандарин». Это действие повлечет за собой определенный исход: индивидуум получит один из двух фруктов и сможет его съесть. Соответственно в одном случае исход будет состоять в том, что он съест грушу, а в другом — мандарин.

В самой простой ситуации принятия решения варианты действий отождествляются с исходами и такое действие-исход можно назвать просто **альтернативой**. В описанной ситуации можно считать, что есть две альтернативы: «груша» и «мандарин».

Важное понятие теории принятия решений (и важное понятие в теории игр в целом) — **стратегии**. Это понятие не требуется, если оставаться в рамках индивидуального статического принятия решений при полной информации. В этом контексте мы можем однозначно сопоставить одной альтернативе (действию) одну стратегию. Таким образом, в рассматриваемой пока что ситуации введение понятия стратегии не дает дополнительных преимуществ. Но в дальнейшем это понятие нам еще понадобится и окажется очень полезным.

Таким образом, пока что у нас «исход», «действие», и «стратегия» — это одно и то же. В дальнейшем, по мере рассмотрения все более сложных моделей мы проведем различия между этими ключевыми понятиями. Все это пока можно называть одним словом — «альтернатива».

Согласно теории рационального выбора, индивидуумы всегда выбирают ту альтернативу, которая по их мнению является наилучшей. Пусть $\mathscr{O} = \{a, b, c, \ldots\}$ — это множество возможных исходов (альтернатив). Какая альтернатива наилучшая? Предполагается, что индивидуум наделен определенными **предпочтениями** относительно этих исходов. Предпочтения позволяют сравнивать между собой любую пару исходов. Каким может быть сравнение? Нужно, чтобы индивидуум, если ему предъявят какую-нибудь пару альтернатив (a и b) из множества $\mathscr{O}$, мог сказать, какая из альтернатив **хуже**, а какая **лучше**. Конечно, бывает, что альтернативы **эквивалентны** между собой, так что нельзя сказать, что одна строго лучше другой.

Используются следующие обозначения.

- a лучше b (строго предпочитается): $a \succ b$;
- a хуже b: $a \prec b$;
- a эквивалентно b (индивидуум безразличен в выборе между a и b): $a \sim b$;
- a лучше или эквивалентно b (нестрого предпочитается): $a \succcurlyeq b$;
- a хуже или эквивалентно b: $a \preccurlyeq b$.

Предполагается, что индивидуум является рациональным, в том смысле, что он всегда может сравнить любую пару альтернатив и что он последователен в своих предпочтениях. Более конкретно, предполагается, что предпочтения лица, принимающего решение, обладают следующими свойствами.

Рефлексивность. Любая альтернатива a эквивалентна самой себе ($a \sim a$ и $a \succeq a$).

Полнота. Для двух альтернатив выполнено одно и только одно из следующих соотношений: a лучше b ($a \succ b$) или b лучше a ($b \succ a$) или a и b эквивалентны ($a \sim b$).

Транзитивность. Если a лучше чем b, а b лучше чем c, то a лучше чем c:

$$\text{из } a \succ b \text{ и } b \succ c \text{ следует } a \succ c.$$

Кроме того, выполнено

$$\text{из } a \succ b \text{ и } b \sim c \text{ следует } a \succ c,$$
$$\text{из } a \sim b \text{ и } b \succ c \text{ следует } a \succ c,$$
$$\text{из } a \sim b \text{ и } b \sim c \text{ следует } a \sim c.$$

Обычно в теории рационального выбора принимают, что индивидуумы максимизируют полезность — количественный показатель, который соизмеряет все возможные исходы. (В теории игр полезность называется выигрышем.) Функцией полезности называют такую функцию, которая сопоставляет каждому из возможных исходов некоторое число (например, исходу a сопоставим $u(a)$). Такие числа и принято называть полезностями. Числа сопоставляются таким образом, чтобы выполнялось следующее свойство:

$$u(a) > u(b) \text{ тогда и только тогда, когда } a \succ b$$

и

$$u(a) = u(b) \text{ тогда и только тогда, когда } a \sim b.$$

Пусть, например, $\mathscr{O} = \{a, b, c, d, e\}$ и пусть известно, что $a \succ b$, $b \succ c$, $c \sim d$ и $d \succ e$. Если предпочтения рациональны, то указанной информации достаточно, чтобы сравнить любую пару альтернатив. Легко понять, что $a \succ c$, $a \succ d$, $a \succ e$, $b \succ d$, $b \succ e$, $c \succ e$. Функция полезности может быть задана следующим образом: $u(a) = 4$, $u(b) = 3$, $u(c) = 2$, $u(d) = 2$, $u(e) = 1$.

Это операция — нумерация альтернатив — может показаться тривиальной, однако здесь есть несколько проблем.

Во-первых, следует понимать, что полезность не является измерителем счастья, удовольствия или чем-то похожим. Теория принятия решений не говорит ничего о психологии. Все, что предполагается,— это то, что предпочтения индивидуумов можно представить с помощью чисел. Сам по себе уровень полезности или разность уровней не имеют значения, не говорит ничего об «интенсивности» чувств по отношению к тому или другому исходу; важно лишь простое сопоставление. В связи с этим, для полезности важно только то, больше она или меньше, но не то, насколько больше или меньше. Если $u(a) = 1$ и $u(b) = 3$, то это не означает, что b в три раза полезнее a. Нельзя также сказать, что b полезнее a на 2. Если полезность отрицательна, то это не означает, что индивидууму «совсем плохо».

Во-вторых, функция полезности неоднозначна. Для любых предпочтений существует бесконечно много различных функций полезности. В рассмотренном выше примере мы могли взять $u(a) = 3{,}14$, $u(b) = 2{,}72$, $u(c) = 0$, $u(d) = 0$, $u(e) = -100$.

В-третьих, функция полезности не может существовать, если предпочтения не рациональны. Это следует из того факта, что если для предпочтений есть функция полезности, то они заведомо рациональны в том смысле, что полны и транзитивны (это легко проверить по определению).

В-четвертых, для данных предпочтений не обязательно всегда найдется функция полезности. В рассмотренном выше примере мы сравнивали 5 альтернатив, поэтому все было просто. Если же альтернатив бесконечно много (континуум), то функции полезности может не быть.

Задача индивидуального статического принятия решений при полной информации может показаться тривиальной. Если имеются предпочтения, описываемые функцией полезности $u(\cdot)$, причем $u(a) > u(b) > u(c)$, то выбор очевиден — это a. Однако когда альтернатив бесконечно много, задача выбора оптимума может быть не столь тривиальной.

1.4. Одномерная оптимизация

Пример дискретной оптимизации: пусть $u(n) = -n^3 + n^2 + 2$ и пусть n можно выбрать на уровне -1, 1, 2 или 5. Полезность равна $u(-1) = 4$, $u(1) = 2$, $u(2) = -2$, $u(5) = -98$. Ясно, что следует выбрать $n = -1$.

Пусть $\mathscr{O} = [0, +\infty)$, x — типичная альтернатива из $\mathscr{O}$ — неотрицательное действительное число и пусть $u(x) = \sqrt{x}$. Каково оптимальное решение на отрезке $[0, +\infty)$? Ответ: оптимального решения не существует. Чем больше x, тем больше полезность, тем больше выигрыш $\sqrt{x}$. Можно увеличивать полезность неограниченно.

Пусть теперь множество альтернатив, из которого выбирает индивидуум,— это отрезок $[2, 5]$. Тогда наилучшая альтернатива — это $x = 5$. При этом $u(x) = \sqrt{5}$.

Если функция полезности $u(x)$ является непрерывной и выбирается число из отрезка $[a, b]$, то, как известно из математического анализа, оптимум обязательно существует. Если функция полезности дифференцируема и оптимум окажется во внутренней части, т. е. $x \in (a, b)$, то в нем производная функции $u(x)$ равна нулю: $u'(x) = 0$.

Можно искать оптимум перебором. Сначала надо найти все точки x из отрезка (a, b) для которых $u'(x) = 0$. Потом надо сравнить значения $u(x)$ во всех найденных точках и на концах отрезка ($x = a$ и $x = b$). Значение x, при котором достигается максимальное значение, и будет искомым решением. (Надо только помнить, что не все точки x, для которых $u'(x) = 0$, будут соответствовать максимуму. Некоторые могут соответствовать, наоборот, минимуму.)

Пусть надо найти максимум функции $u(x) = -x^2 + x$ на отрезке $[-1; 1]$. Решаем уравнение $u'(x) = -2x + 1 = 0$. Получим $x = 1/2$. При этом $u(1/2) = 1/4$. Еще надо учесть, что $u(-1) = -2$ и $u(1) = 0$. Значит, $x = 1/2$ — наилучшая альтернатива из $[-1; 1]$.

Еще один пример: требуется найти максимум функции $u(x) = x^2 - x$ на отрезке $[-1; 1]$. Решаем уравнение $u'(x) = 2x - 1 = 0$. Получим $x = 1/2$. При этом $u(1/2) = -1/4$. Кроме того, $u(-1) = 2$ и $u(1) = 0$. Значит, $x = -1$ — наилучшая альтернатива из $[-1; 1]$.

Рассмотрим теперь пример оптимизации с недифференцируемой функцией. Пусть нужно выбрать x из $[0, +\infty)$ и пусть

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x \le 2, \\ 2, & \text{при } 2 \le x \le 3, \\ 5 - x, & \text{при } x \ge 3. \end{cases}$$

Здесь наилучшая альтернатива неединственна; это целый отрезок $[2; 3]$.

Пусть нужно выбрать x из $[0;1]$ и пусть

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x < 1, \\ 0, & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

В этом примере наилучшей альтернативы не существует. Чем ближе x к единице, тем выше полезность, если только $x < 1$. Но уже выбор $x = 1$ — заведомо не самый лучший. Здесь функция полезности не является непрерывной.

1.5. Принятие решений в динамике. Дерево решений

Дерево решений — это графическое изображение ситуации принятия решений, схема, показывающая альтернативные действия и их последствия. Дерево решений является полезный инструмент принятия решений. Оно помогает сформировать наглядную картину потерь и выгод, связанных с каждым возможным образом действий.

Дерево решений состоит из следующих компонент:

- одна начальная вершина;
- для каждой вершины, кроме конечных, указываются возможные действия — ветви, исходящие из этой вершины;
- в каждой из конечных вершин указываются исходы или же выигрыши (как вариант — для каждого действия-ветви указывается изменение выигрыша, связанное с этим действием).

На Рис. 1.1 показана известная сказочная ситуация принятия решений в виде дерева решений. На этом дереве имеется одна начальная вершина, в которой принимается решение — выбирается одно из трех действий, и три конечные вершины, которым сопоставлены три исхода.

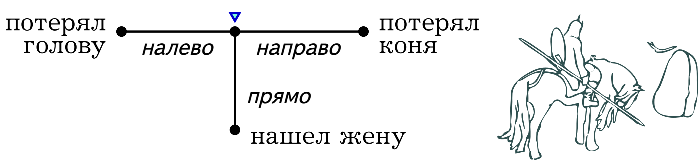


Рис. 1.1. Сказочная ситуация принятия решений

С помощью дерева удобно описывать ситуации, когда решения принимаются последовательно, в динамике. На Рис. 1.2 изображено подобное решение. Сначала индивидуум выбирает, провести ли отдых дома или купить тур в Европу. Если индивидуум выбирает поездку в Европу, то затем он выбирает вид транспорта.

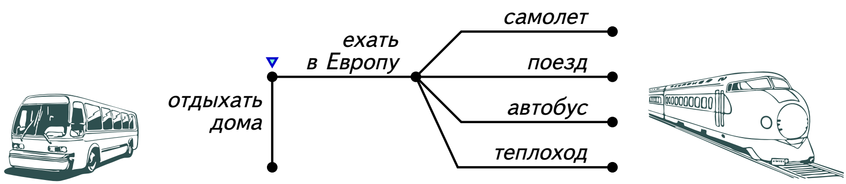


Рис. 1.2. Принятие решения о туристической поездке

В подобных динамических играх проявляется различие между действием и стратегией. Стратегия — это полный план действий, который должен предусматривать выбор некоторых действий в каждой из возможных ситуаций, возникающих в процессе принятия решения. Так, в примере, изображенном на Рис. 1.2, стратегия индивидуума должна состоять из двух частей, поскольку должна описывать выбор в каждой из двух вершин, в которых принимаются решения:

1. Я провожу отпуск дома/в Европе
2. Если я решил провести отпуск в Европе, то я поеду самолетом/поездом/автобусом/теплоходом.

Согласно формальному определению стратегии, в данной ситуации принятия решений индивидуум имеет 8 стратегий ($8 = 2 \times 4$ — перемножаются количества вариантов действий в двух вершинах, где индивидуум принимает решения). Например, одна из стратегий — это (*дома*, *автобусом*), что можно расшифровать следующим образом: «я буду проводить отпуск дома, но если мне придется решать, на чем ехать в Европу, то я выберу автобус». Очевидно, что такое определение стратегии приводит к избыточности, поскольку некоторые стратегии включают описание действий в таких ситуациях, которые не могут произойти. В данном случае можно сгруппировать 4 «странные» стратегии в одну — *остаться дома*, тогда у индивидуума останется всего 5 стратегий.

В дальнейшем мы встретимся с понятием стратегии при рассмотрении игр, когда решение принимаются сразу несколькими субъектами. В игровых моделях избыточность в описании стратегии может быть кажущейся, поскольку те решения, которые будут приняты в ситуациях, которые никогда не случатся, могут существенно повлиять на ход игры. Это говорит о стратегическом характере принятия решений в теории игр.

1.5.1. Задача о кратчайшем пути

На Рис. 1.3 изображена сеть дорог. Рядом с каждой дорогой указано время пути в минутах. Требуется проехать из пункта $\boldsymbol{a}$ в пункт $\boldsymbol{e}$ за кратчайшее время. Для решения этой задачи построим соответствующее дерево решений. Предварительно для упрощения выберем только те направления движения, которые имеет смысл использовать. Они показаны на Рис. 1.3 стрелками. (Например, не имеет смысла двигаться из $\boldsymbol{b}$ в пункт $\boldsymbol{c}$, поскольку в $\boldsymbol{c}$ можно быстро, за 5 мин., попасть сразу из $\boldsymbol{a}$.) Если двигаться только в направлении стрелок, то маршрут не будет содержать петель, так что дерево решений оказывается конечным.

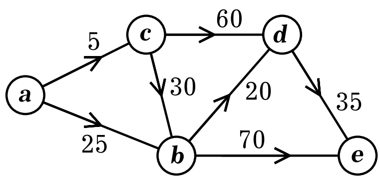


Рис. 1.3. Дорожная сеть для задачи о кратчайшем пути из $\boldsymbol{a}$ в $\boldsymbol{e}$

Дерево решений показано на Рис. 1.4. Дерево строится следующим образом. Мы начинаем двигаться от пункта $\boldsymbol{a}$. При этом мы можем поехать либо в пункт $\boldsymbol{b}$, либо в пункт $\boldsymbol{c}$. Поэтому из начальной вершины дерева выходят две ветви, помеченные как *b* и *c*. Если мы выберем *b*, то окажемся в в пункте $\boldsymbol{b}$, откуда сможем поехать либо в пункт $\boldsymbol{d}$, либо в пункт $\boldsymbol{e}$. Из соответствующей вершины выходят две ветви, помеченные как *d* и *e*. Продолжая эти рассуждения, получим все дерево. Рядом с ветвями (в рамках) записаны приросты времени движения со знаком минус. Суммируя эти числа, получим выигрыши в конечных вершинах дерева. Выигрыши отрицательны, поскольку мы стремимся сделать время как можно меньшим. Если, например, из $\boldsymbol{a}$ мы поехали в $\boldsymbol{b}$, затем в $\boldsymbol{d}$, затем в $\boldsymbol{e}$, то в сумме затратим на маршрут $(25+20+35)$ мин., так что выигрыш составит -80.

При анализе дерева решений, следует планировать наперед и проводить анализ с конца. Следует вычеркивать (по крайней мере мыс-

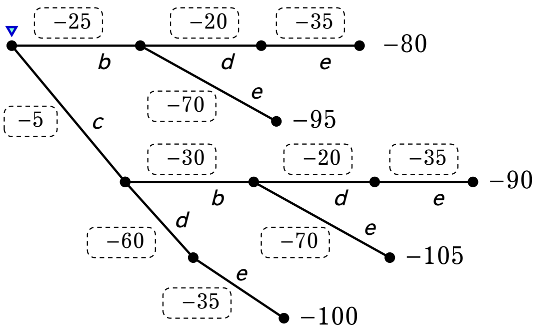


Рис. 1.4. Дерево решений для задачи о кратчайшем пути

ленно) те ветви, которые не будут выбраны.

На Рис. 1.4 показано оптимальное решение, найденное таким методом. Дерево несколько упрощено за счет того, что выбор пути из $\boldsymbol{b}$ в $\boldsymbol{e}$ через $\boldsymbol{d}$ помечен как *d,e*. В вершине 4 из *e* и *d,e* следует выбрать *d,e* ($-90 > -105$). В вершине 2 из *e* и *d,e* следует выбрать *d,e* ($-80 > -95$). В вершине 3 из *b* и *d,e* следует выбрать *b* ($-90 > -100$). В вершине 1 из *b* и *c* следует выбрать *b* ($-80 > -90$). Таким образом, наименьшее время пути равно 80. Из $\boldsymbol{a}$ следует поехать в $\boldsymbol{b}$, затем в $\boldsymbol{d}$, затем в $\boldsymbol{e}$.

На Рис. 1.4 этот метод рассуждений отражен с помощью дополнительных графических обозначений. Те действия, которые не будут выбраны, перечеркнуты. Оптимальные действия дополнительно помечены жирным пунктиром. Соответственно, оптимальная траектория состоит из тех ветвей, помеченных жирным пунктиром, которые идут друг за другом из начальной вершины.

Найденную оптимальную стратегию можно описать следующим образом:

- из $\boldsymbol{a}$ ехать в $\boldsymbol{b}$;
- если в $\boldsymbol{b}$ попали из $\boldsymbol{a}$, то ехать в $\boldsymbol{d}$ и далее в $\boldsymbol{e}$;
- из $\boldsymbol{c}$ ехать в $\boldsymbol{b}$;
- если в $\boldsymbol{b}$ попали из $\boldsymbol{c}$, то ехать в $\boldsymbol{d}$ и далее в $\boldsymbol{e}$.

Заметим, во-первых, что в этой стратегии есть избыточность, связанная с представлением задачи в виде дерева. Такое представление носит несколько искусственный характер. Можно было просто написать «из $\boldsymbol{b}$ ехать в $\boldsymbol{d}$ и далее в $\boldsymbol{e}$» без «если». Во-вторых, и это

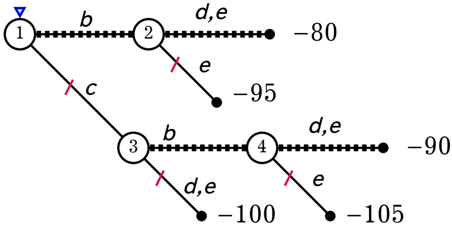


Рис. 1.5. Кратчайший путь из ***a*** в ***e***

очень важно, так как стратегия — полный план, то она предусматривает действия в пункте ***c***, хотя эта возможность и не реализуется.

Алгоритм, который здесь используется, называется динамическим программированием. В теории игр он известен под названием обратной индукции.

1.6. Межвременные предпочтения и дисконтирование

Если сам по себе фактор времени не играет роли, а важна только последовательность, в которой выбираются варианты действий, то при динамическом принятии решений мы можем складывать те выигрыши (положительные и отрицательные), которые возникают в процессе игры. Однако известно, что люди по разному оценивают текущие выигрыши и те, которые получат в будущем. Здесь есть феномен нетерпения (сегодняшний рубль ценится больше, чем завтрашний), и феномен откладывания неприятного (лучше сделать неприятную работу завтра, а не сегодня). В связи с этим в экономике принято будущие выигрыши складывать с текущими с понижающим коэффициентом, так называемым коэффициентом дисконтирования или дисконтирующим множителем.

Коэффициент дисконтирования, который мы обозначим через δ, по смыслу представляет собой положительное число, меньшее единицы. Пусть, например, сегодня вы вкладываете в инвестиционный проект 1 млн. руб., через год он принесет прибыль 600 тыс. руб., а через два года — еще 800 тыс. руб. Если $\delta = 0{,}9$, то общий выигрыш, приведенный к настоящему моменту времени (в финансах эту величину называют «чистая приведенная стоимость», NPV), составит

$$-1000 \cdot 1 + 600 \cdot 0{,}9 + 800 \cdot 0{,}9^2 = 188.$$

Иногда вместо дисконтирующего множителя используется ставка дисконтирования. Если r — ставка дисконтирования, то дисконтирующий множитель равен

$$\delta = \frac{1}{1+r}.$$

Например, дисконтирующему множителю $\delta = 0{,}9$ соответствует ставка дисконтирования

$$r = \frac{1}{\delta} - 1 = \frac{1}{0{,}9} - 1 = \frac{1}{9} \approx 0{,}11,$$

т. е. 11%.

> Поразмышляйте о рациональности с учетом фактора времени. Пьяница может завтра пожалеть, что он много пил, но сегодня он готов сделать все ради выпивки. Студент в вечер перед экзаменом может быть готов заплатить $10 за то, чтобы отложить экзамен еще на день, но если попросить его сделать такой же выбор в начале семестра, то он, скорее всего решит, что отсрочка на день не стоит $10. Согласуются ли подобные явления в изложенной здесь концепцией дисконтирования выигрышей?

1.7. Принятие решений при риске

Пока что мы не вводили в ситуацию принятия решений неопределенность и риск[1]. Мы рассматривали только ситуации определенности, когда действия однозначно определяют исход. Может быть так, что исходы неоднозначно определяются выбором и индивидуум, принимающий решения, должен учесть неопределенность (риск), связанную с выбором.

Если требуется анализировать риски и выигрыши, связанные с различными вариантами действий, то, как и раньше, дерево решений можно использовать как визуальный и аналитический инструмент поддержки принятия решений. Если проблема принятия решений включает риск, то при изображении дерева решений вводят

[1] Можно различать «риск» и «неопределенность», но мы этого делать не будем.

фиктивного игрока, которого называют «Природой». Ситуации принятия решения, в которых присутствует элемент случайности, часто называют **играми против природы**.

У «Природы» нет собственных целей, и она производит свой выбор случайным образом. Предполагается, что вероятности, с которыми «Природа» выбирает вариант развития событий, заранее известны лицу, принимающему решения. Соответственно, на дереве решений будут вершины трех типов, а не двух:

- вершины, в которых лицо, принимающее решения, делает свой выбор;
- вершины, в которых «Природа» случайно выбирает один из вариантов развития событий;
- конечные вершины.

В дальнейшем вершины, соответствующие случайным ходам природы, мы обычно будем обозначать значком ✤. На ветвях, соответствующих действиям природы, указываются вероятности этих действий. Мы будем указывать такие вероятности в квадратных скобках. На Рис. 1.6 изображен типичный случайный ход природы в орлянке.

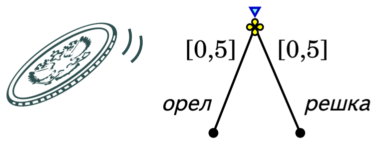


Рис. 1.6. Типичный ход природы в орлянке

Как мы увидим впоследствии, неопределенность играет очень важную роль в теории игр. Дело в том, что в теории игр рассматривается принятие решений индивидуумом в условиях, когда результат принятия решения зависит от того, какие решения примут другие индивидуумы. Но поскольку достаточно трудно точно предсказать, как будут действовать другие, то оказывается, что ситуация, в которой принимается решение, содержит элемент неопределенности. С этой точки зрения умение обращаться с неопределенностью является ключевым для теории игр. Даже в тех играх, где иного источника неопределенности, кроме решений других индивидуумов, не существует, бывает необходимо принимать во внимание неопределенность.

Как, с учетом того, что есть неопределенность по поводу исходов, выразить полезность и предпочтения на имеющихся альтернативах?

Лотереи

Как мы видели ранее, описание статической задачи принятия решений при определенности должно включать перечисление возможных исходов и предпочтения лица, принимающего решение, относительно этих исходов. То же самое верно и в условиях неопределенности. Только теперь мы должны модифицировать определения исхода и предпочтений. Неопределенный исход принято называть лотереей.

Когда индивидуум выбирает лотерею, он выбирает набор возможных исходов, каждому из которых сопоставлена вероятность, с которой он может реализоваться. Пусть возможны k различных исходов: $O_1,\ldots,O_k$. Каждому исходу сопоставляется соответствующая вероятность: $p_1,\ldots,p_k$. Каждая из вероятностей должна быть из интервала $[0,1]$, а сумма вероятностей должна равняться единице. Такая структура и будет называться лотереей. Можно обозначить ее через $\mathscr{L}$.

На Рис. 1.7 такая лотерея изображена в виде дерева.

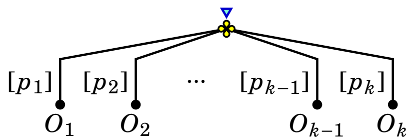


Рис. 1.7. Лотерея с k исходами в виде дерева

Чтобы моделировать принятие решений при риске, мы должны уметь моделировать выбор на лотереях. Какая из двух или более лотерей является самой предпочтительной для лица, принимающего решение? (См. Рис. 1.8.)

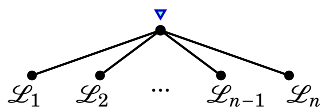


Рис. 1.8. Выбор из нескольких лотерей

Допустим, что индивидуум, имеет счет в банке на 75 тыс. руб., и владеет предприятием, которое с вероятностью 0,2 принесет в будущем дополнительный доход 150 тыс. руб., а с вероятностью 0,8 — доход 25 тыс. руб. Нас интересует вопрос о том, за сколько этот индивидуум готов продать свое предприятие. Чтобы ответить на это вопрос, нам следует знать, каковы предпочтения на лотереях рассматриваемого индивидуума. (Здесь в качестве примера рассматривается лотерея с выигрышами, выраженными в деньгах. Это только для упрощения, и как только будет необходимо, мы можем сразу отказаться от этого предположения.)

Пусть x — это денежная сумма, которую он может выручить за предприятие. Тогда решение о том, продавать ли предприятие, состоит в сравнении двух лотерей: первая лотерея ($\mathscr{L}_1$) дает $(75+150)$ тыс. руб. с вероятностью 0,2 и $(75+25)$ тыс. руб. с вероятностью 0,8, а вторая лотерея ($\mathscr{L}_2$) дает $(75+x)$ тыс. руб. с вероятностью единица. На Рис. 1.9 изображено дерево для подобного выбора. Индивидуум осуществляет выбор между $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$, а случайные ходы делает природа. Мы хотим найти граничное значение x, т. е. такое, при котором ему безразлично, продавать или не продавать предприятие. Решение этой задачи зависит от того, какие именно предпочтения на лотереях имеет индивидуум.

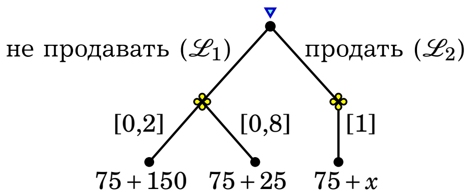


Рис. 1.9. Выбор между лотереями $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$

Ожидаемая полезность (функция полезности фон Неймана—Моргенштерна)

Ранее мы предположили, что существует функция полезности, представляющая предпочтения на простых исходах. Но может ли существовать функция полезности, представляющая предпочтения на лотереях? Теорема об ожидаемой полезности отвечает на этот вопрос утвердительно и, более того, указывает, как именно должна выглядеть такая функция. В основе соответствующей теории лежит предположение, что предпочтения индивидуума, определенные на лотереях, удовлетворяют определенным условиям (аксиомам). Это дает возможность доказать, что существует функция полезности (а именно, функция Неймана—Моргенштерна), представляющая такие предпочтения. Исторически данная теория была разработана для нужд теории игр[2].

Пусть, как и выше, $O_1, O_2, \ldots, O_k$ — это исходы для лотереи $\mathscr{L}$, и реализуются они с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$ соответственно. Теорема об ожидаемой полезности утверждает, что (если выполнены соответствующие аксиомы) предпочтения на лотереях представимы функцией полезности следующего вида:

$$U(\mathscr{L}) = p_1 u(O_1) + p_2 u(O_2) + \ldots + p_n u(O_n).$$

Здесь функция $u(\cdot)$ — это элементарная функция полезности (ее еще иногда называют функцией полезности Бернулли). Она сопоставляет некоторому исходу O его полезность $u(O)$.

Функция $U(\mathscr{L})$, которая оценивает лотереи,— это так называемая функция полезности фон Неймана—Моргенштерна. Видим, что она имеет вид ожидаемой полезности, т. е. вид математического ожидания полезностей исходов, поскольку это взвешенное среднее полезностей с весами, равными вероятностям исходов. Как лотереи составлены из отдельных исходов, так же и предпочтения на лотереях составлены из предпочтений на отдельных исходах.

В этой теории есть тонкий момент. В отступление от того, что говорилось ранее, элементарные функции полезности уже не просто задают порядок, выстраивая альтернативы от худшей к лучшей (больше денег лучше, чем меньше денег), но и сравнивают уровни полезности. Например, если у человека есть 1000 руб. и ему дают рубль или у того же человека есть 1 млн руб. и ему дают рубль — прирост полезности во втором случае будет меньше, рубль в первом случае будет полезнее.

Дело в том что те аксиомы, которые лежат в основе теоремы об ожидаемой полезности (мы здесь не будем обсуждать, в чем конкретно они заключаются) являются слишком «смелыми». Есть свидетельства, что в некоторых ситуациях они плохо описывают то, как в действительности ведут себя люди, сталкивающиеся с риском. Однако использование функции Неймана—Моргенштерна сильно упрощает модели теории игр, поэтому несмотря на имеющиеся проблемы почти всегда делается это предположение. В дальнейшем мы везде

[2]См. классическую работу фон Неймана и Моргенштерна по теории игр.

будем предполагать, что предпочтения индивидуума (в теории принятия решений — лица, принимающего решение, в теории игр — игрока) описываются функцией полезности Неймана—Моргенштерна.

Вернемся к примеру с продажей рискованного предприятия. Какую именно из двух лотерей предпочтет рассматриваемый индивидуум, зависит от его элементарной функции полезности $u(W)$ (где W — общее богатство индивидуума, которым он будет владеть в будущем в результате своего выбора и случайного хода природы). Минимальная сумма, за которую он готов отдать предприятие, (мы обозначим ее через $\bar{x}$) должна быть такой, чтобы он был безразличен между двумя лотереями. Таким образом, следует рассмотреть уравнение $U(\mathscr{L}_1) = U(\mathscr{L}_2)$, которое можно записать в виде

$$u(75+\bar{x}) = 0{,}2u(75+150) + 0{,}8u(75+25).$$

Решив это уравнение, получим $\bar{x}$. В качестве примеров рассмотрим три различные элементарные функции полезности (случаи А, В и С):

$$u_A(W) = W, \quad u_B(W) = \sqrt{W}, \quad u_C(W) = W^2.$$

В случае А подставим $u_A(W) = W$ и получим уравнение

$$75 + \bar{x}_A = 0{,}2 \cdot 225 + 0{,}8 \cdot 100 = 125.$$

Решением уравнения будет $\bar{x}_A = 50$. Значит, индивидуум с элементарной функцией полезности $u_A(W) = W$ готов продать предприятие за 50 тыс. руб.

В случае В подставим $u_B(W) = \sqrt{W}$ и получим уравнение

$$\sqrt{75 + x_B} = 0{,}2 \cdot \sqrt{225} + 0{,}8 \cdot \sqrt{100} = 0{,}2 \cdot 15 + 0{,}8 \cdot 10 = 11.$$

Отсюда $\bar{x}_B = 11^2 - 75 = 121 - 75 = 46$.

Наконец, в случае С при $u_C(W) = W^2$ имеем уравнение

$$(75 + \bar{x}_C)^2 = 0{,}2 \cdot 225^2 + 0{,}8 \cdot 100^2 = 18125.$$

Отсюда $\bar{x}_C = \sqrt{18125} - 75 \approx 134{,}63 - 75 = 59{,}63$.

Отношение к риску

В рассматриваемом примере мы получили $x_A = 50$, $x_B = 46$ и $x_C \approx 59{,}63$. Таким образом, в случае В индивидуум будет готов продать предприятие дешевле, а в случае С — дороже. Случай А особый: индивидуум готов продать предприятие за сумму, равную ожидаемому доходу от предприятия:

$$0{,}2 \cdot 150 + 0{,}8 \cdot 25 = 30 + 20 = 50.$$

Все дело в том, что если элементарная функция полезности индивидуума имеет вид $u_B(W) = \sqrt{W}$, то он менее склонен рисковать, чем если его элементарная функция полезности имеет вид $u_C(W) = W^2$. В случае $u_A(W) = W$ индивидуум безразличен между рискованной лотереей, которая в среднем приносит денежный выигрыш $75 + 50$ и гарантированным выигрышем $75 + 50$. Таких индивидуумов принято называть **нейтральными к риску**. Интуитивно, индивидууму не холодно и не жарко от того, что вознаграждение становится более рискованным.

В случае В индивидуум предпочитает гарантированно иметь $75 + 46$, чем участвовать в лотерее с ожидаемым выигрышем $75 + 50$. Он готов потерять в деньгах $50 - 46 = 4$, чтобы избавиться от риска. Таких индивидуумов называют **рискофобами** (т. е. не любящими рисковать).

Наконец, в случае С возможность участвовать в лотерее с ожидаемым выигрышем $75 + 50$ более предпочтительна для индивидуума, чем гарантированный выигрыш $75 + 59{,}63$. Здесь $59{,}63 > 50$. Следовательно, в этом случае рассматриваемый индивидуум — **рискофил** (человек, любящий рисковать).

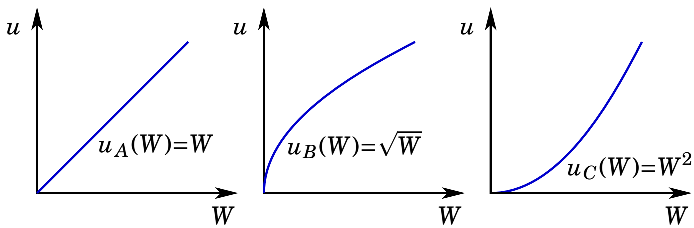


Рис. 1.10. Разное отношение к риску: А — нейтральный к риску индивидуум; В — рискофоб; С — рискофил

В общем случае отношение индивидуума к риску определяется степенью вогнутости его элементарной функции полезности. Вогнутость функции означает, что индивидуум — рискофоб. Линейность функции означает, что индивидуум нейтрален по отношению к риску. Выпуклость функции означает, что индивидуум — рискофил.

Пусть в рассматриваемом примере p — вероятность получить 150, а $1-p$ — вероятность получить 25 (вместо 0,2 и 0,8). Найдите величины x_A, x_B and x_C в зависимости от вероятности p.

Проверьте, что при $p=1$ и при $p=0$ во всех трех случаях индивидуум готов заплатить одну и ту же сумму (какую?). Объясните этот результат.

Нарисуйте график зависимости величин x_A, x_B and x_C от p. Проанализируйте форму и взаимное расположение графиков и обсудите отношение к риску в трех случаях.

?

Заметьте, что вогнутость элементарной функции полезности подразумевает, что индивидуум характеризуется убывающей предельной полезностью (чем больше у него денег, тем меньше он ценит небольшой прирост богатства). Это одна из характеристик рискофоба (человека, характеризующегося неприятием риска).

Неприятие риска больше подходит для описания поведения людей, чем любовь к риску, поэтому обычно предполагается, что лицо, принимающее решение, является рискофобом. Иногда для упрощения предполагают нейтральность к риску. Ниже мы рассмотрим пример — так называемый «Санкт-петербургский парадокс» — который в яркой форме иллюстрирует различие между нейтральностью к риску и неприятием риска. Рискофилы в теории принятия решений и теории игр почти не встречаются.

На Рис. 1.10 показаны три рассмотренных случая элементарных функций полезности.

Сложные и простые лотереи

Мы предполагаем, что индивидуума, принимающего решение, интересуют только сами исходы и их вероятности, но не то, каким образом получены эти исходы. Это предположение можно интерпретировать через двухэтапные лотереи.

Пусть есть две лотереи. Лотерея $\mathscr{L}_1$ дает исход A с вероятностью 0,7 и исход B с вероятностью 0,3, а лотерея $\mathscr{L}_2$ дает исход A с вероятностью 0,2 и исход B с вероятностью 0,8. Рассмотрим лотерею, исходом которой служит лотерея $\mathscr{L}_1$ с вероятностью 0,2 и лотерея $\mathscr{L}_2$ с вероятностью 0,8. Эта будет двухэтапная лотерея. Вероятность исхода A в этой двухэтапной лотерее равна

$$0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}3,$$

а вероятность исхода B равна

$$0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}7.$$

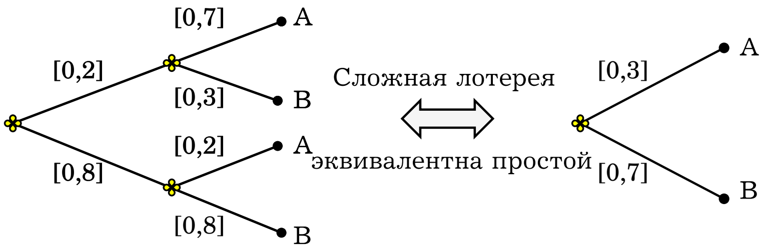


Рис. 1.11. Сложная лотерея и эквивалентная ей простая лотерея

На Рис. 1.11 показана рассматриваемая двухэтапная лотерея и эквивалентная ей простая.

Санкт-петербургский парадокс

Описание и объяснение этого парадокса приводятся в статье известного швейцарского ученого Даниила Бернулли: «Петр бросает вверх монету, пока она не упадет лицевой стороной вверх; если это происходит после первого броска, он должен дать Павлу 1 дукат, но если только после второго — 2 дуката, после третьего — 4, после четвертого — 8 и так далее, так что после каждого броска число дукатов удваивается. Спрашивается: какова оценка жребия для Павла?».

Ожидаемый доход от этой игры для Павла бесконечно велик, однако вряд ли кто согласится заплатить за право участия в такой игре неограниченно большую сумму. В этом и состоит парадокс. Объяснение парадокса состоит в том, что «ценность денег» для индивидуума не является постоянной. Она определяется некоторой возрастающей вогнутой элементарной функцией полезности. То есть объяснение состоит в том, что индивидуум, как правило, является рискофобом, а не нейтральным к риску.

Предположим, что исходный (безрисковый) доход Павла составляет сумму ω дукатов. В таком случае он сталкивается с лотереей, приносящей ему доход $\omega + 2^{k-1}$ с вероятностью 2^{-k} $(k = 1, 2, \ldots, \infty)$.

Ожидаемый доход (с учетом цены p, уплаченной за участие в игре) равен

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}(\omega + 2^{k-1} - p) = \infty.$$

Сколь бы большой не была цена p, этот ожидаемый доход будет положительным (равным плюс бесконечности). Если $u(\cdot)$ — элементарная функция полезности Павла, то ожидаемая полезность равна

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} u(\omega + 2^{k-1} - p).$$

Например, если $u(x) = \ln(x)$ и $\omega = 100$, то максимальная цена, которую Павел будет готов отдать за участие в игре, определяется из уравнения

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \ln(100 + 2^{k-1} - p) = \ln(100).$$

Решая численно это уравнение, получим цену

$$p \approx 4{,}36,$$

которая меньше бесконечности.

Свертывание дерева решений с помощью подсчета ожидаемого выигрыша и обратная индукция

Игра 1 (решение о покупке товара неизвестного качества):
Предположим, что некий индивидуум решает, купить ли ему некоторый товар или нет. Товар может оказаться годным с вероятностью p и негодным с вероятностью $1 - p$. Ситуацию можно представить деревом, изображенным на Рис. 1.12. ⊙

Для того чтобы выбрать оптимальное решение, нужно сравнить две альтернативы в соответствии с их ожидаемой полезностью:

$$u(\text{без товара}) \quad \text{или} \quad p \cdot u(\text{годный товар}) + (1 - p) \cdot u(\text{негодный товар}).$$

Если на дереве решений изображаются ходы природы в явном виде, как на Рис. 1.12, то в каждой конечной вершине указываются исходы или же фактически полученные выигрыши (но не ожидаемые выигрыши). Когда индивидуум достигает данной конечной вершины, он получает выигрыш, соответствующий этой вершине, а не ожидаемый выигрыш.

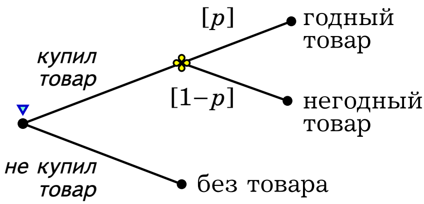


Рис. 1.12. Покупка товара неизвестного качества

Однако мы можем сворачивать дерево решений, и заменять части дерева, которые не зависят он действий лица, принимающего решения, на соответствующие ожидаемые выигрыши. На Рис. 1.13 показано свернутое дерево решений, соответствующее рассматриваемому примеру. При этом ожидаемые выигрыши — это элементы расчетов, которые индивидуум проводит при анализе дерева решений, а не часть исходного дерева решений.

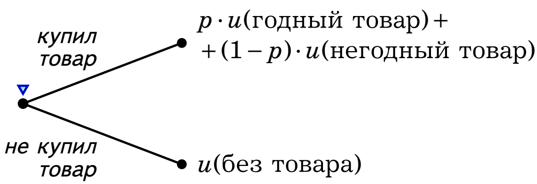


Рис. 1.13. Покупка товара неизвестного качества — свернутое дерево решений

Игра 2 (научно-исследовательские работы[3]): Пусть менеджер на предприятии должен решить, вкладывать ли средства в изделие A или в изделие B. (Он не может сделать и то и другое из-за финансовых ограничений.) Согласно имеющимся оценкам, научно-исследовательские работы по изделию A требуют инвестиций в размере двух миллионов долларов ($2M), но шансы, что исследования будут успешными и удастся организовать производство изделия, равны всего 50%. С вероятностью 30% будет получена прибыль от

[3]Основано на примере из статьи `http://en.wikipedia.org/wiki/Decision_tree`.

продаж \$5M, с вероятностью 40% — \$10M, а с вероятностью 30% изделие не удастся продать. Научно-исследовательские работы по изделию B, с другой стороны, будут стоить также \$2M, но вероятность их успеха равна 100%. С вероятностью 80% будет получена прибыль от продаж \$5M, а с вероятностью 20% изделие не удастся продать. Издержки производства и того и другого изделия равны \$1M. ⊙

Если политика компании состоит в максимизации ожидаемой прибыли (то есть компания нейтральна к риску), то какая стратегия будет наилучшей? Альтернативы, вероятности, выигрыши и расчеты ожидаемой прибыли показаны на дереве принятия решений, приведенном на Рис. 1.14.

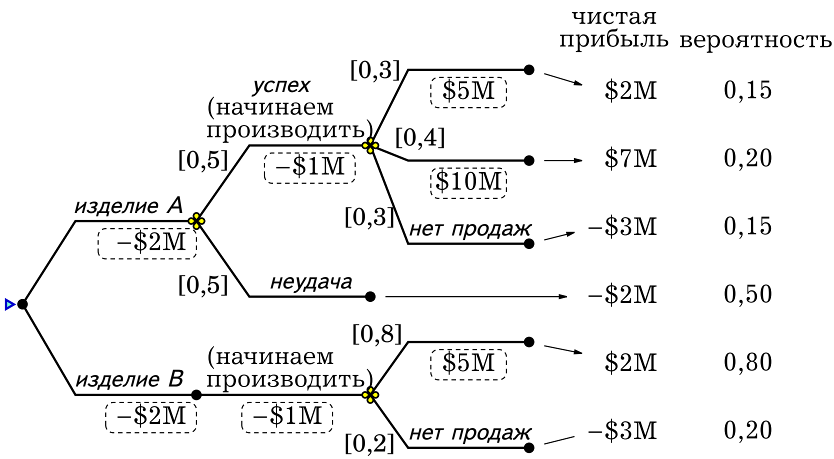


Рис. 1.14. Дерево решений: изделие A или изделие B

Изначально около ветвей дерева решений изображаются приросты денежных выигрышей (в рамке). Чтобы получить окончательный выигрыш для каждого исхода, следует сложить выигрыши вдоль ветвей, приводящих к этому исходу. (Хотя в этом примере денежные потоки в явном виде не дисконтируются, но можно считать, что все суммы уже продисконтированы.)

Для каждого из возможных действий — выбора изделия A или изделия B — можно подсчитать вероятности исходов. Они рассчитываются как *произведение* вероятностей вдоль ветвей, приводящим к этим исходам. Таким образом, для каждого исхода имеем вероятности и суммарные выигрыши (см. правую часть Рис. 1.14). Для каждого из двух действий (двух альтернатив-лотерей) сумма вероятностей равна единице. Для изделия A ожидаемый выигрыш равен

$$0{,}15 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 7 + 0{,}15 \cdot (-3) + 0{,}5 \cdot (-2) = 0{,}25,$$

а для изделия B он равен

$$0{,}8 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot (-3) = 1.$$

Ожидаемый выигрыш для изделия A можно рассчитать и по-другому — за счет поэтапного сворачивания игры. Сначала можно рассчитать ожидаемый выигрыш на последнем этапе — когда изделие начинают производить, а затем уже рассчитать ожидаемый выигрыш для свернутого дерева (Рис. 1.15).

Сначала получим

$$0{,}3 \cdot 2 + 0{,}4 \cdot 7 + 0{,}3 \cdot (-3) = 2{,}5,$$

а затем уже

$$0{,}5 \cdot 2{,}5 + 0{,}5 \cdot (-2) = 0{,}25.$$

Ответ тот же.

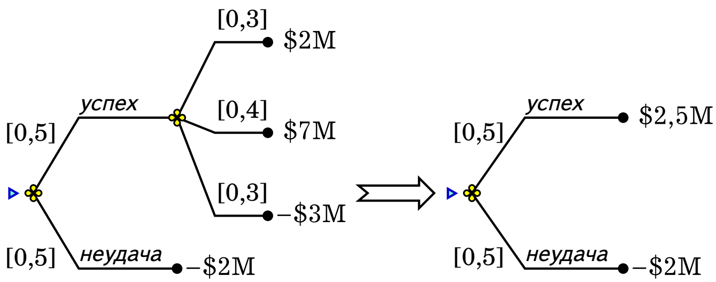


Рис. 1.15. Сворачивание дерева решений для изделия A

Мы нашли ожидаемый выигрыш для двух лотерей и теперь можем выбрать лучшую. В целом мы видим, что изделие B более выгодное, чем изделие A, поскольку приносит более высокий ожидаемый чистый доход ($1 > 0{,}25$).

Игра 3 (приобретение недвижимости): У девелоперской фирмы есть возможность купить некоторую недвижимость за 2 млн руб. Если фирме дадут соответствующее разрешение (вероятность чего равна 60%), то она сможет переоборудовать эту недвижимость под офисы и перепродать за 2,5 млн руб. Если разрешение не будет получено, то можно будет сбыть эту недвижимость за 1,7 млн руб. или же подать апелляцию на решение органа, выдающего разрешения. Апелляция обойдется в 50 тыс. руб. при вероятности успешного решения 10%. Стоит ли девелоперу покупать эту недвижимость? ⊙

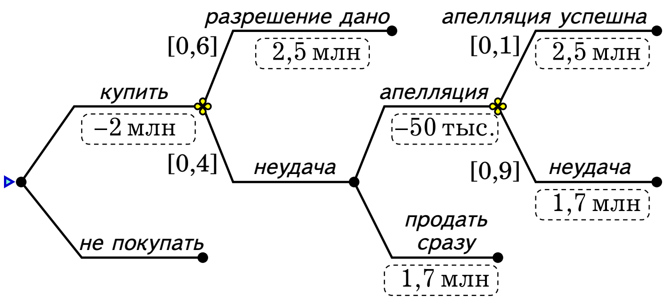


Рис. 1.16. Приобретение недвижимости

В данной игре имеется две вершины, в которых решение принимает девелопер (Рис. 1.16). Это решение о том, покупать или не покупать недвижимость, и решение о том, подавать или не подавать апелляцию, если не будет дано разрешение. Здесь уже принципиально динамическая ситуация и нельзя найти оптимум просто сравнивая альтернативы-лотереи. К счастью, мы можем здесь, как и ранее, воспользоваться обратной индукцией, сворачивая дерево, начиная с конечных вершин. При этом следует использовать следующие принципы:

- В вершине, соответствующей случайному ходу природы, рассчитывается ожидаемая полезность как сумма произведений выигрышей по ветвям и их вероятностей. Этой вершине сопоставляется рассчитанная ожидаемая полезность.
- В вершине, где ход принадлежит лицу, принимающему решение, следует выбрать ветви (действия), приносящие этому лицу наибольший выигрыш, и сопоставить рассматриваемой вершине этот наибольший выигрыш.

Применим эти принципы к анализируемой ситуации. После того, как девелопер подал апелляцию, имеет место случайный ход природы, который приносит 2,5 млн руб. с вероятностью 0,1 и 1,7 млн руб. с вероятностью 0,9. ожидаемый прирост выигрыша составит

$$0{,}1 \cdot 2{,}5 + 0{,}9 \cdot 1{,}7 = 1{,}78.$$

Если вычесть из этого 0,05 млн руб., затраченные на апелляцию, то получим 1,73. Поскольку 1,73 больше 1,7, то апелляция выгодна для девелопера. Мы можем приписать соответствующей ветке прирост выигрыша 1,73. Далее рассматриваем случайный ход природы, дающий игроку 2,5 млн руб. с вероятностью 0,6 и 1,73 млн руб. с вероятностью 0,4. Ожидаемый прирост выигрыша составит

$$0{,}6 \cdot 2{,}5 + 0{,}4 \cdot 1{,}73 = 2{,}192.$$

Вычитая из этой суммы 2 млн руб. за покупку недвижимости, получим 0,192 млн руб. Это больше нулевого выигрыша, который девелопер получит, если не купит недвижимость. Следовательно, ему выгодно купить недвижимость.

Если мы все же хотим найти решение сравнением лотерей, то это можно сделать с использованием понятия стратегии. В данной динамической ситуации имеется четыре стратегии: (купить, подать апелляцию), (купить, не подавать апелляции), (не покупать, подать апелляцию), (не покупать, не подавать апелляции). Последние два варианта содержат чисто гипотетические действия, которые не реализуются по ходу игры. Их можно объединить в комбинированную стратегию «не покупать». Стратегия (купить, не подавать апелляции) приводит к лотерее, обеспечивающей 0,5 млн руб. с вероятностью 0,6 и −0,3 млн руб. с вероятностью 0,6. Ожидаемый выигрыш от этой лотереи равен

$$0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot (-0{,}3) = 0{,}3 - 0{,}12 = 0{,}18.$$

Следует сравнить три лотереи и найти из них наилучшую.

> В Игре 3 найдите лотереи, соответствующие имеющимся стратегиям. Найдите оптимальную стратегию, сравнив ожидаемые выигрыши от этих лотерей.
>
> **?**

1.7.1. Динамическое принятие решений при риске

Динамическое принятие решений при риске обычно требует комбинировать расчет ожидаемого выигрыша с дисконтированием. Рассмотрим соответствующий несложный пример[4], в котором предполагается нейтральность к риску.

Игра 4: Фирма Хайпром хочет построить новый завод. Проект требует инвестиций в размере 2 млрд руб. Вложения должны быть сделаны сегодня. Вероятность того, что проект окажется успешным, равна 65%. Ожидаемые денежные потоки в случае успеха составят 900 млн руб. ежегодно в течение трех лет после осуществления инвестиций. Если проект провалится, ожидаемые денежные потоки составят 500 млн руб. ежегодно в течение следующих трех лет. Для оценки проектов этого типа Хайпром использует процентную ставку 12%.

Прежде, чем будут сделаны вложения, можно провести анализ рынка, наняв для этого консалтинговую фирму. Консультационные услуги стоят p. Их требуется оплатить вперед, до того как будет произведен анализ. Анализ займет один год. После этого Хайпром будет знать наверняка, окажется ли проект успешным (с вероятностью 0,65) или нет (с вероятностью 0,35). На основе полученной информации можно принять решение о том, строить или не строить. При этом все параметры проекта остаются прежними, но график выполнения сдвигается на один год.

Полностью данная ситуация показана в виде дерева решений на Рис. 1.17. ⊙

На Рис. 1.17 семь возможных исходов обозначены буквами A, B, C, D, E, F и G. Исход C дает фирме Хайпром нулевой выигрыш, а исходы E и G — выигрыш $-p$. Для остальных исходов дисконтированные выигрыши (т. е. чистую приведенную стоимость, NPV) следует рассчитать, используя дисконтирующий множитель $\delta = 1/1{,}12 \approx 0{,}893$:

$$NPV_A = -2000 + 900/1{,}12 + 900/1{,}12^2 + 900/1{,}12^3 \approx 161{,}65,$$

$$NPV_B = -2000 + 500/1{,}12 + 500/1{,}12^2 + 500/1{,}12^3 \approx -799{,}08,$$

$$NPV_D = -p + NPV_A/1{,}12 \approx -p + 144{,}33,$$

$$NPV_F = -p + NPV_B/1{,}12 \approx -p - 713{,}47.$$

[4] Siu Kai Choy, MGT337Y: Business Finance, Problem set #3, University of Toronto, Joseph L. Rotman School of Management, 2007 г.

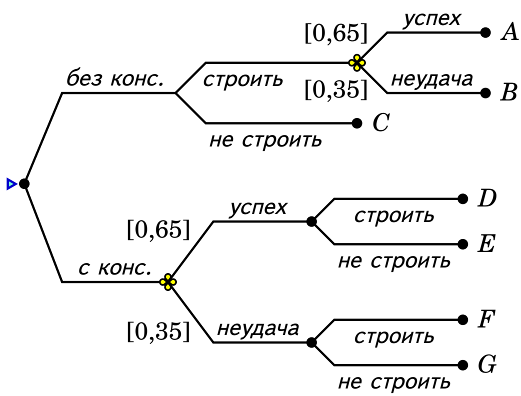


Рис. 1.17. Дерево решений для Игры 4

Можно теперь перерисовать дерево решений с учетом рассчитанных выигрышей (см. Рис. 1.18).

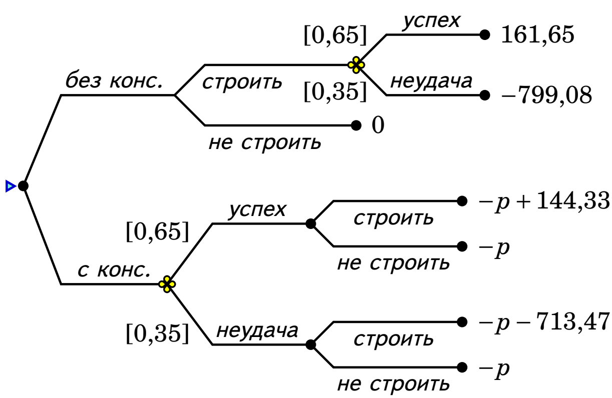


Рис. 1.18. Дерево решений для Игры 4 с указанием окончательных выигрышей

Если фирма осуществит проект без использования консультантов, то ее ожидаемый выигрыш составит

$$0{,}65 \cdot NPV_A + 0{,}35 \cdot NPV_B \approx -174{,}61.$$

Это меньше нуля, поэтому без обращения в консультационную фирму проект осуществлять невыгодно. В этом случае ее выигрыш будет нулевым.

Если консультационная фирма сообщит, что проект будет неудачным, то выгоднее не строить ($-p > -p - 713{,}47$). В этом случае выигрыш будет равен $-p$. Если же консультационная фирма сообщит, что проект будет удачным, то выгоднее строить ($-p + 144{,}33 > -p$). В этом случае выигрыш будет равен $NPV_D \approx -p + 144{,}33$. В целом при использовании услуг консультационной фирмы ожидаемый выигрыш составит

$$0{,}65 \cdot NPV_D + 0{,}35 \cdot NPV_G \approx 0{,}65 \cdot (-p + 144{,}33) + 0{,}35 \cdot p \approx 93{,}81 - p.$$

Видим, что если стоимость услуг консультационной фирмы меньше 93,81, то выгодно к ней обратиться и строить или не строить в зависимости от результатов анализа. Если же стоимость услуг больше 93,81, то выгодно совсем отказаться от проекта и не использовать консультантов.

1.7.2. Непрерывный случай принятия решений при риске — страхование от пожара

Пусть элементарная функция полезности индивидуума имеет вид $u(W) = \ln(W)$. Богатство его в обычном состоянии (без пожара) составляет 3 млн, а при пожаре он несет ущерб в размере 1 млн, так что в результате пожара богатство составит 2 млн. Вероятность пожара равна 0,1. Индивидуум может застраховать свое имущество. Если x — страховая сумма, а γ — цена страховки, то богатство без пожара и при пожаре равно соответственно

$$W_1 = 3 - \gamma x$$

и

$$W_2 = 2 - \gamma x + x = 2 + (1-\gamma)x.$$

Ожидаемая полезность как функция страховой суммы равна

$$U(x) = 0{,}9 \ln(3 - \gamma x) + 0{,}1 \ln(2 + (1-\gamma)x).$$

Индивидуум выбирает страховую сумму $x \geq 0$, которая дает максимум ожидаемой полезности. Производная по x равна

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x} = -\frac{0{,}9\gamma}{3 - \gamma x} + \frac{0{,}1(1-\gamma)}{2 + (1-\gamma)x}.$$

Приравнивая производную к нулю, получим уравнение

$$1{,}8\gamma + 0{,}9\gamma(1-\gamma)x = 0{,}3 - 0{,}3\gamma - 0{,}1\gamma(1-\gamma)x,$$

откуда

$$\gamma(1-\gamma)x = 0{,}3 - 2{,}1\gamma$$

и

$$x(\gamma) = \frac{0{,}3 - 2{,}1\gamma}{\gamma(1-\gamma)}.$$

Рассмотрим несколько частных решений:

$$x(0{,}05) = \frac{78}{19} \approx 4{,}11, \quad x(0{,}1) = 1, \quad x(0{,}12) = \frac{5}{11} \approx 0{,}45, \quad x(0{,}2) = -\frac{3}{4} = -0{,}75.$$

В последнем случае получили отрицательное значение x, что недопустимо. На самом деле при $\gamma = 0{,}2$ должно быть $x = 0$ (если решение в нуле, то производная целевой функции не равна нулю, а меньше или равна нулю).

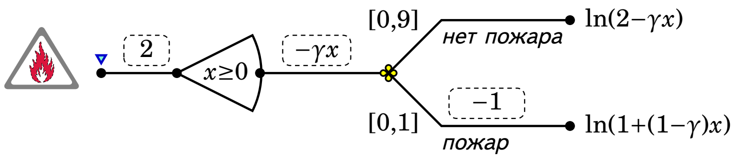


Рис. 1.19. Дерево принятия решений для страхования от пожара

Наиболее интересен случай, когда $\gamma = 0{,}1$. Это справедливая цена страховки — она равна вероятности страхового случая. При этом индивидуум застрахуется в точности на величину ущерба, т. е. на 1 млн. Это общее свойство, не зависящее от вида элементарной функции полезности и вероятностей. При $\gamma < 0{,}1$ (дешевая страховка) он застрахуется больше, чем на величину ущерба, а при $\gamma > 0{,}1$ (дорогая страховка) — меньше, чем на величину ущерба.

Изобразим дерево решений для рассмотренного решения о страховании (Рис. 1.19). Выбираемая переменная x принимает непрерывные значения, поэтому соответствующий выбор показан в виде сектора. При каждом выборе x начинается свое поддерево, выигрыши для которого зависят от x. Поскольку невозможно изобразить все это бесконечное множество поддеревьев, то изображено только одно, но «параметрическое» — выигрыши на нем зависит от параметра x.

Рассмотрите элементарную функцию полезности общего вида $u(W)$, произвольную вероятность пожара p и произвольные величины богатства без пожара K_1 и при пожаре K_2. Предположите только, что функция $u(W)$ дифференцируема и что ее производная $u'(W)$ убывает (т. е. что индивидуум — рискофоб). Покажите, что если $\gamma = p$, то индивидуум застрахуется на сумму $x = K_1 - K_2$, т. е. на величину ущерба.

Покажите далее, что при $\gamma < p$ окажется, что $x > K_1 - K_2$, а при $\gamma > p$ наоборот $x < K_1 - K_2$.

?

1.7.3. Рандомизация

Рандомизация — это случайный выбор действия (в теории игр принято говорить о **смешанной стратегии**). Пусть $O_1, \ldots, O_n$ — исходы. **Случайный исход** (смешанная стратегия) — это распределение вероятностей на этих исходах: $\boldsymbol{\sigma} = p_1, \ldots, p_n$, где $p_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^n = 1$. Выбор случайного исхода, как и выбор обычного исхода в условиях риска, принято моделировать с помощью функции Неймана—Моргенштерна. Оптимальный случайный исход (оптимальная смешанная стратегия) находится из задачи максимизации ожидаемой полезности

$$U(\boldsymbol{\sigma}) = p_1 u(O_1) + \cdots + p_n u(O_n).$$

Упрощенно случайный исход (смешанную стратегию) можно задавать символической записью следующего вида (как если бы это было математическое ожидание *исходов*):

$$\boldsymbol{\sigma} = p_1 O_1 + \cdots + p_n O_n.$$

Выгодна ли рандомизация?

В случае двух исходов, O_1 и O_2, можем ввести обозначение $p = p_1$. При этом $p_2 = 1 - p$ и случайный исход полностью описывается одним параметром $p \in [0;1]$. Ожидаемая полезность равна

$$U(p) = pu(O_1) + (1-p)u(O_2).$$

Ясно, что в случае $u(O_1) > u(O_2)$ максимум достигается при $p = 0$, а в случае $u(O_1) < u(O_2)$ — при $p = 1$. Если $u(O_1) = u(O_2)$, то любое значение $p \in [0;1]$ подходит в качестве решения, поскольку ожидаемая полезность является константой.

Эти выводы нетрудно распространить на случай $n > 2$ исходов. Если имеется исход O_j, который лучше все остальных,т. е. такой что $u(O_j) > u(O_i)$ при всех $i \neq j$, то оптимальный случайный исход имеет вид $p_j = 1$ и $p_i = 0$ при всех $i \neq j$, т. е. имеет вид так называемой **чистой стратегии**.

Если есть несколько эквивалентных исходов, то выбор случайного исхода будет неоднозначным. Например, если $n = 3$, $u(O_1) = 3$, $u(O_2) = 3$ и $u(O_3) = 1$, то решение будет определяться условиями $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 = 1$ и $p_3 = 0$. В том числе среди решений будут чистые стратегии $(1,0,0)$ и $(0,1,0)$. Если $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, то индивидуум рандомизирует исходы O_1 и O_2. В любом из решений ожидаемая полезность будет равна 3. Таким образом, того же результата, что и при рандомизации, можно добиться без рандомизации, с использованием чистых стратегий (неслучайных исходов).

Это общее свойство: если индивидуум смешивает исходы (стратегии), то они для него эквивалентны. При этом того же выигрыша можно достичь использованием одной из чистых стратегий. Значит, никакого смысла рандомизировать при принятии решений нет. Однако следует оговориться, что это верно только для функции Неймана—Моргенштерна. В частности, человек может ценить саму по себе неожиданность, связанную с рандомизацией.

1.8. Байесовское принятие решений

1.8.1. Сведения из теории вероятностей: совместные, частные и условные вероятности

Вероятность — это количественный измеритель неопределенности, присущей нашим представлениям и суждениям о возможности появления тех или иных событий. В теории принятия решений и теории игр чаще всего используется субъективный взгляд на вероятность, т. е. вероятности представляют собой субъективные оценки шансов появления событий лицом, принимающим решение[5].

Если A — это некоторое **событие**, то вероятность его мы будем обозначать $\mathsf{P}(A)$ ($\mathsf{P}(A) \in [0;1]$). Введем некоторые полезные термины.

Пусть события A и B таковы, что если произошло A, то не могло произойти B. Такую пару событий называют **несовместными (взаимоисключающими) событиями**. Вероятности несовместных событий скла-

[5]Хотя в некоторых случаях вероятность можно воспринимать как относительную частоту появления некоторого события в серии повторяющихся испытаний.

дываются. Если $A_1,\ldots,A_n$ попарно несовместны, то выполнено

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1 \text{ или } \ldots \text{ или } A_n) &= \\ &= \mathbf{P}(\text{произошло хотя бы одно из событий } A_1,\ldots,A_n) = \\ &= \mathbf{P}(A_1) + \cdots + \mathbf{P}(A_n).\end{aligned}$$

Далее, события $A_1,\ldots,A_n$ образуют полную (исчерпывающую) группу (или систему) событий, если хотя бы одно из событий точно происходит:

$$\mathbf{P}(A_1 \text{ или } \ldots \text{ или } A_n) = 1.$$

Пусть события $A_1,\ldots,A_n$ образуют полную группу несовместных событий (или, другими словами взаимоисключающий и исчерпывающий набор событий), т. е. может произойти *одно и только одно* из них. Для такой группы событий выполнено

$$\mathbf{P}(A_1) + \cdots + \mathbf{P}(A_n) = 1,$$

т. е. сумма вероятностей этих событий должна быть равна единице.

Рассмотрим два таких взаимоисключающих и исчерпывающих набора событий на примере. Человек слушает утренний прогноз погоды и старается определить с его помощью, будет ли дождь в течении дня (от этого зависит, брать ли с собой зонт). Предположим, что переменная «прогноз» может принимать три различные значения: «дождь», «облачно» и «ясно». Соответствующие события Д, О или Я — это взаимоисключающий и исчерпывающий набор событий. Предположим далее, что R — это событие, состоящее в том, что в течении дня будет достаточно сильный дождь, в результате которого человек рискует промокнуть. Событие R и дополнительное к нему событие «не R» — это тоже взаимоисключающий и исчерпывающий набор событий.

В Таблице 1.1 задано совместное распределение вероятностей для двух случайных переменных — утреннего прогноза погоды и фактической погоды (в левом верхнем прямоугольнике). Указанные вероятности имеют вид $\mathbf{P}(X \text{ и } Y)$, где X — это Д, О или Я, а Y — R или «не R». Можно предположить, что эти вероятности отражают внутренние представления человека, накопленный им в течении предыдущей жизни опыт.

Суммы по строкам и столбцам — это частные (маргинальные) вероятности. Их также можно назвать безусловными вероятностями (как противоположность условным о которых ниже).

Таблица 1.1. Распределение вероятностей для прогноза и фактической погоды

	Прогноз			
Погода	Д	О	Я	$\sum$
R (дождь)	0,15	0,1	0,05	0,3
Не R (нет дождя)	0,05	0,15	0,5	0,7
$\sum$	0,2	0,25	0,55	1

Условная вероятность события A при условии, что произошло событие B, определяется как

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A \text{ и } B)}{\mathbf{P}(B)} \text{ при } \mathbf{P}(B) > 0.$$

Рассмотрим вероятность дождливой погоды (R). Безусловная вероятность равна сумме совместных вероятностей по соответствующей строке таблицы:

$$\mathbf{P}(R) = 0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}05 = 0{,}3.$$

Пусть теперь человек услышал прогноз погоды. С учетом этой информации какой будет для него вероятность дождя? Пусть прогноз был Д. Безусловная вероятность события Д есть сумма совместных вероятностей по соответствующему столбцу:

$$\mathbf{P}(\text{Д}) = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}2.$$

Первое слагаемое здесь — это совместная вероятность Д и R: $\mathbf{P}(\text{Д и } R) = 0{,}15$. Поэтому

$$\mathbf{P}(R \mid \text{Д}) = \frac{\mathbf{P}(\text{Д и } R)}{\mathbf{P}(\text{Д})} = \frac{0{,}15}{0{,}2} = 0{,}75.$$

Если прогноз был О, то

$$\mathbf{P}(R \mid \text{О}) = \frac{\mathbf{P}(\text{О и } R)}{\mathbf{P}(\text{О})} = \frac{0{,}1}{0{,}1 + 0{,}15} = 0{,}4.$$

Если прогноз был Я, то

$$\mathbf{P}(R \mid \text{Я}) = \frac{\mathbf{P}(\text{Я и } R)}{\mathbf{P}(\text{Я})} = \frac{0{,}05}{0{,}05 + 0{,}5} = \frac{1}{11} \approx 0{,}09.$$

Наоборот, если человек с утра не слушал прогноза, но знает, какая сегодня была погода, то он, обладая информацией Таблицы 1.1, может судить о прогнозе. Безусловные вероятности у нас равны $\mathbf{P}(\text{Д}) = 0{,}2$, $\mathbf{P}(\text{О}) = 0{,}25$, $\mathbf{P}(\text{Я}) = 0{,}55$. Найдем условные вероятности при том, что был дождь (событие R):

$$\mathbf{P}(\text{Д} \mid R) = \frac{\mathbf{P}(\text{Д и } R)}{\mathbf{P}(\text{R})} = \frac{0{,}15}{0{,}3} = 0{,}5.$$

Далее,

$$\mathbf{P}(\text{О} \mid R) = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$$

и

$$\mathbf{P}(\text{Я} \mid R) = \frac{0{,}05}{0{,}3} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17.$$

Идея этих расчетов довольно проста. Пусть человек точно знает, что сегодня был дождь (событие R). С учетом этого факта события (Д и R), (О и R) и (Я и R) будут составлять взаимоисключающую и исчерпывающую группу. Их вероятности равны 0,15, 0,1 и 0,05 соответственно, но сумма вероятностей не единица, а $\mathbf{P}(\text{R}) = 0{,}3$. Для получения условных вероятностей нужно эти вероятности нормировать к единице, то есть поделить каждую на 0,3.

Тот же принцип можно применить к немного другой ситуации. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — взаимоисключающий и исчерпывающий набор событий. Сумма их вероятностей равна единице. Пусть мы узнали, что события $A_{k+1}, \ldots, A_n$ $(1 < k < n)$ точно не произошли, другими словами, произошло событие $B = A_1$ или … или A_k. Вероятность такого события равна

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1) + \cdots + \mathbf{P}(A_k).$$

Условно по событию B мы можем пересчитать вероятности событий $A_1, \ldots, A_n$ При $i = 1, \ldots, k$

$$\mathbf{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A_i \text{ и } B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A_i)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A_i)}{\mathbf{P}(A_1) + \cdots + \mathbf{P}(A_k)}.$$

При $i = k+1, \ldots, n$

$$\mathbf{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A_i \text{ и } B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{0}{\mathbf{P}(B)} = 0.$$

Пусть в рассматривавшемся примере точно известно, что прогноз был не Я. Вероятность этого равна $\mathbf{P}(\text{не Я}) = 0{,}2 + 0{,}25 = 0{,}45$. Условно по этому факту $\mathbf{P}(\text{Д} \mid \text{не Я}) = 0{,}2/0{,}45 = 4/9$, $\mathbf{P}(\text{О} \mid \text{не Я}) = 0{,}25/0{,}45 = 5/9$ и $\mathbf{P}(\text{Я} \mid \text{не Я}) = 0$.

1.8.2. Байесовское обучение. Формула Байеса

Пусть имеется набор взаимоисключающих и исчерпывающих гипотез $H_1,\ldots,H_n$ об окружающей обстановке. $\mathsf{P}(H_i)$ — это априорные вероятности, т. е. вероятности до получения дополнительной информации. Это представление индивидуума об окружающей обстановке. Пусть индивидуум получил дополнительную информацию — узнал, что произошло событие D. Ему известны условные вероятности $\mathsf{P}(D \mid H_i)$. $\mathsf{P}(D \mid H_i)$ — это вероятность наблюдения этих данных, если верна гипотеза H_i. Требуется скорректировать вероятности с учетом D, т. е. найти $\mathsf{P}(H_i \mid D)$ — апостериорные вероятности (вероятности, рассчитанные с учетом дополнительной информации).

По определению

$$\mathsf{P}(H_i \mid D) = \frac{\mathsf{P}(H_i \text{ и } D)}{\mathsf{P}(D)}.$$

Учтем, что $\mathsf{P}(H_i \text{ и } D) = \mathsf{P}(D \mid H_i)\mathsf{P}(H_i)$ и получим

$$\mathsf{P}(H_i \mid D) = \frac{\mathsf{P}(D \mid H_i)\mathsf{P}(H_i)}{\mathsf{P}(D)}.$$

Это формула Байеса. (Ее также называют правилом Байеса, законом Байеса или теоремой Байеса.) В числителе стоит вероятность $\mathsf{P}(D)$, которую можем вычислить по так называемой формуле полной вероятности:

$$\mathsf{P}(D) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i \text{ и } D) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(D \mid H_i)\mathsf{P}(H_i).$$

Рассмотрим пример[6]. Компьютеры, продаваемые в России по месту производства бывают «белой» (Б), «красной» (К) и «желтой» (Ж) сборки. Они встречаются в следующей пропорции: 25%, 5% и 70%. Среди компьютеров «белой» сборки 1% дефектных, «красной» — 3% дефектных и «желтой» — 5% дефектных. Пусть случайно купленный компьютер оказался дефектным. Каковы апостериорные вероятности места сборки (т. е. условные по тому факту, что компьютер дефектный)?

Сначала находим совместные вероятности места сборки и наличия дефекта (Таблица 1.2). Апостериорные вероятности рассчитываем по правилу Байеса, нормируя совместные вероятности к единице:

$$\mathsf{P}(\text{Б} \mid D) = \frac{0{,}0025}{0{,}039} \approx 0{,}064 = 6{,}4\%,$$

[6]Пример условный и указываемые вероятности не имеют отношения к реальной ситуации.

Таблица 1.2. Расчет апостериорных вероятностей места сборки

Гипотеза, H_i	Б	К	Ж	$\sum$
Априорные вероятности, $\mathsf{P}(H_i)$	0,25	0,05	0,7	1
$\mathsf{P}(D \mid H_i)$	0,01	0,03	0,05	
$\mathsf{P}(D$ и $H_i)$	0,0025	0,0015	0,035	0,039
Апостериорные вероятности, $\mathsf{P}(H_i \mid D)$	0,064	0,038	0,897	1

$$\mathsf{P}(\text{К} \mid D) = \frac{0{,}0015}{0{,}039} \approx 0{,}038 = 3{,}8\%,$$

$$\mathsf{P}(\text{Ж} \mid D) = \frac{0{,}035}{0{,}039} \approx 0{,}897 = 89{,}7\%.$$

1.8.3. Байесовское принятие решений. Байесовское дерево решений

До сих пор мы рассматривали лотереи, которые происходят по времени *после* принятия решения индивидуумом. Однако во многих ситуациях принятия решений случайный ход природы по смыслу должен предшествовать принятию решения. Рассмотрим простую ситуацию подобного рода.

Таблица 1.3. Выигрыши для принятия решения о зонте

	Взять зонт (З)	Пойти без зонта (БЗ)
Дождь (R)	20	–60
Нет дождя (не R)	–30	50

Человек решает, взять ли ему с собой зонт. Его выигрыши заданы Таблицей 1.3. Сначала рассмотрим случай, когда человек не имеет информации о прогнозе погоды, только оценивает каким-то образом вероятность дождя исходя из времени года. Обозначим эту априорную субъективную вероятность через p. Дерево решений для принятия решения о том, брать ли зонт, показано на Рис. 1.20.

Если человек берет зонт, то получает ожидаемый выигрыш

$$p \cdot 20 + (1 - p) \cdot (-30) = 50p - 30.$$

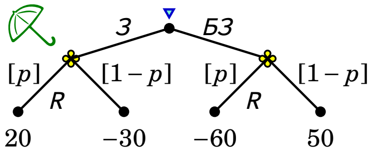


Рис. 1.20. Дерево для принятия решения о зонте

Если он не берет зонт, то получает ожидаемый выигрыш

$$p \cdot (-60) + (1-p) \cdot 50 = 50 - 110p.$$

Найдем граничную вероятность $\bar{p}$, при которой человеку безразлично, брать ли зонт (З ~ БЗ). Решаем уравнение

$$50p - 30 = 50 - 110p,$$

откуда $\bar{p} = 0{,}5$ (см. Рис. 1.21). Например, если априорная вероятность дождя, как и выше, равна $\mathbf{P}(R) = 0{,}3$, то надо идти без зонта, так как $0{,}3 < \bar{p} = 0{,}5$.

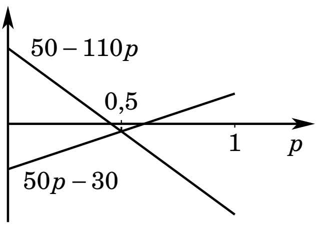


Рис. 1.21. Сравнение ожидаемых полезностей для выбора оптимального решения о зонте

Что будет, если до принятия решения произошло случайное событие, которое несет дополнительную информацию о возможности дождя? Если человек слышал прогноз погоды, то он может использовать эту информацию при принятии решения. Его ожидаемую полезность следует уже рассчитывать на основе соответствующих условных (апостериорных) вероятностей. Если прогноз был Д, то условно по этому факту вероятность дождя равна $\mathbf{P}(R \mid \text{Д}) = 0{,}75$. С учетом этого ($0{,}75 > 0{,}5$) делаем вывод, что нужно взять с собой зонт. Если прогноз был О или Я, то следует исходить из вероятностей $\mathbf{P}(R \mid \text{О}) = 0{,}4$

и $\mathbf{P}(R \mid Я) \approx 0{,}09$. Ясно, что при этих вероятностях человеку не стоит брать зонт ($0{,}4 < 0{,}5$ и $0{,}09 < 0{,}5$).

Игра 5 (разведка на нефть): Нефтяной компании принадлежит некоторый участок. В наличии или отсутствии нефти можно убедится с помощью бурения, которое стоит 30 млн руб. Если нефть имеется, то прибыль с месторождения составит 70 млн руб. По предварительным данным шансы, что на участке есть нефть, составляют 60%. Стоит ли компании бурить скважину, если ее интересует суммарная ожидаемая прибыль? ⊙

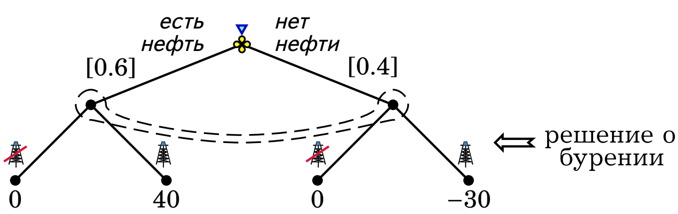


Рис. 1.22. Разведка на нефть — решение о бурении

По поводу этой ситуации можно сказать, что до принятие решения уже имеет место некоторое состояние (свершившийся факт), но лицу, принимающему решения, неизвестно, какое именно состояние имеет место. В экономической теории принято говорить, что есть некоторое **состояние природы** (или **состояние мира**). В рассматриваемой ситуации принятия решения имеется два возможных состояния природы: на участке есть нефть и на участке нет нефти. Предполагается, что индивидуум имеет некоторые представления о том, с какой вероятностью может иметь место то или иное состояние мира. В данном случае компания считает, что два состояния имеют вероятности 0,6 и 0,4 соответственно. Чтобы принять правильное решение, компания должна учесть имеющиеся риски.

На Рис. 1.22 эта ситуация принятия решения изображена в виде дерева. Тот факт, что компания не знает, есть ли нефть на участке, с точки зрения дерева решений означает, что она не знает в момент принятия решения, в правой или левой вершине она находится. Этот факт на дереве отображается с помощью так называемого **информационного множества**. На рисунке информационное множество изображено с помощью контура, содержащие обе вершины, которые фирма не может отличить. Из каждой вершины информационного множества идут ветви, которые соответствуют одинаковым возможным действиям: не бурить скважину или бурить.

Вероятность левой вершины — 0,6, а правой — 0,4. С учетом этих вероятностей можем рассчитать ожидаемые выигрыши от действий, которые можно осуществить в данном информационном множестве. Если компания решит не бурить скважину, то она в любом случае получит 0, так что ожидаемый выигрыш равен нулю. Если компания решит бурить скважину, то ожидаемый выигрыш будет равен

$$0{,}4 \cdot 40 + 0{,}4 \cdot (-30) = 12.$$

Таким образом, выгодно произвести бурение.

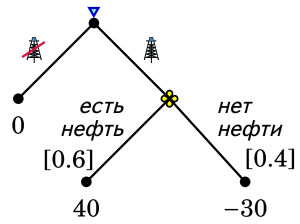


Рис. 1.23. Решение о бурении — «вывернутое» дерево решений

Здесь «Природа» ходит первой, но компания не знает, как сходила «Природа», поэтому их ходы можно поменять местами. При этом дерево решений как бы «выворачиваается» (Рис. 1.23). Такая операция позволяет сделать дерево решений более обозримым и позволяет применить к нему несложную обратную индукцию.

Игра 6 (разведка на нефть с сейсмическим исследованием): Нефтяной компании принадлежит участок, и она хочет определить, есть ли на нем нефть. По предварительным данным шансы, что на участке есть нефть, составляют 60%. Компания может предпринять сейсмические исследования, которые стоят 2 млн руб. Если на участке есть нефть, то сейсмические исследования укажут на это в 80% случаев. Если на участке нет нефти, то сейсмические исследования укажут на это в 90% случаев. Точно в наличии или отсутствии нефти можно убедиться только с помощью бурения, которое стоит 30 млн руб. Если нефть имеется, то общая прибыль с месторождения (без учета перечисленных издержек) составит 70 млн руб. ⊙

На Рис. 1.24 описанная ситуация принятия решений изображена в виде дерева. При этом решение о бурении без проведения сейсмического исследования представлено в «свернутом» виде, поскольку мы уже провели выше соответствующий анализ.

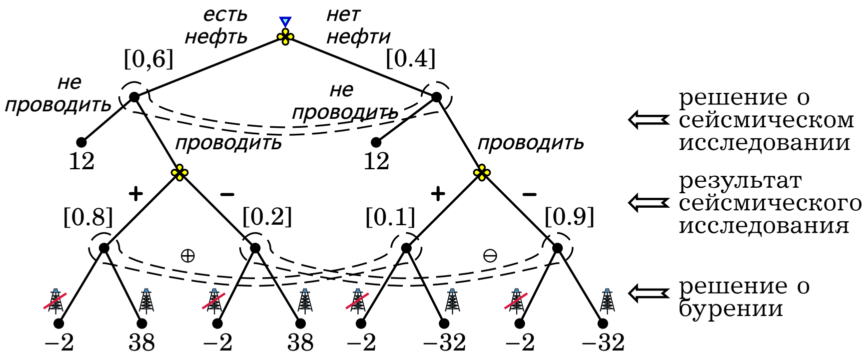


Рис. 1.24. Разведка на нефть — решение о сейсмическом исследовании и бурении

Попробуем анализировать представленное дерево решений с конца. Пусть сейсмическое исследование дало положительный результат — находимся в информационном множестве ⊕. Однако в какой именно вершине мы находимся, неизвестно, поэтому точно не знаем, каим будет выигрыш в случае тех или иных действий. Вероятность попадания в левую вершину равна $0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$, а в правую — $0{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}04$. Общая вероятность попадания в это информационное множество равна $\mathbf{P}(\oplus) = 0{,}48 + 0{,}04 = 0{,}52$. Вероятность попадание в левую вершину, если уже в информационном множестве ⊕:

$$\mathbf{P}(\text{есть нефть} \mid \oplus) = \frac{0{,}48}{0{,}52} = \frac{12}{13} \approx 0{,}92.$$

То же для правой вершины:

$$\mathbf{P}(\text{нет нефти} \mid \oplus) = \frac{0{,}04}{0{,}52} = \frac{1}{13} \approx 0{,}08.$$

Ожидаемая полезность с учетом того, что мы находимся в информационном множестве ⊕ равна –2, если не бурить скважину, и

$$\frac{12}{13} \cdot 38 + \frac{1}{13} \cdot (-32) = \frac{424}{13} = 32\frac{8}{13},$$

если не бурить. Компании выгодно бурить.

Аналогичные рассуждения можем провести для информационного множества $\ominus$ (соответствующего отрицательному результату сейсмического исследования). Вероятность попасть в левую вершину равна $0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12$, а в правую — $0{,}4 \cdot 0{,}9 = 0{,}36$. Общая вероятность попасть в информационное множество $\ominus$ равна $\mathbf{P}(\ominus) = 0{,}12 + 0{,}36 = 0{,}48$. Условные вероятности для двух вершин равны

$$\mathbf{P}(\text{есть нефть} \mid \ominus) = \frac{0{,}12}{0{,}48} = 0{,}25$$

и

$$\mathbf{P}(\text{нет нефти} \mid \ominus) = \frac{0{,}36}{0{,}48} = 0{,}75.$$

Ожидаемые полезности равны -2, если бурить, и

$$0{,}25 \cdot 38 + 0{,}75 \cdot (-32) = -14{,}5,$$

если не бурить. Компании не выгодно производить бурение.

Теперь рассчитаем ожидаемый выигрыш по результатам сейсмического исследования с учетом того, что $\mathbf{P}(\oplus) = 0{,}52$ и $\mathbf{P}(\ominus) = 0{,}48$:

$$0{,}52 \cdot 32\frac{8}{13} + 0{,}48 \cdot (-2) = 16.$$

Если проводим исследование, то ожидаемый выигрыш равен 16, а если нет, то 12. Значит, надо проводить сейсмическое исследование.

Можно описанную логику анализа представить как «выворачивание дерева наизнанку» (Рис. 1.25). Ветка, соответствующая отказу от сейсмического исследования, изображена в развернутом виде. На получившемся дереве решение находится обычной обратной индукцией. Это дерево существенно проще чем то, что изображено на Рис. 1.24. Однако дерево на Рис. 1.24 полезнее тем, что изображает ситуацию с содержательной точки зрения, демонстрирует порядок ходов в явном виде.

Опишем общий алгоритм анализа принятия решения в информационном множестве[7]:

- Надо рассчитать вероятности попадания в каждую из вершин информационного множества при данных предыдущих действиях индивидуума, перемножая вероятности вдоль пути от начальной вершины.

[7]Этот алгоритм не годится в случае, если индивидуум не обладает идеальной памятью, т. е. может забывать информацию, которой владел ранее.

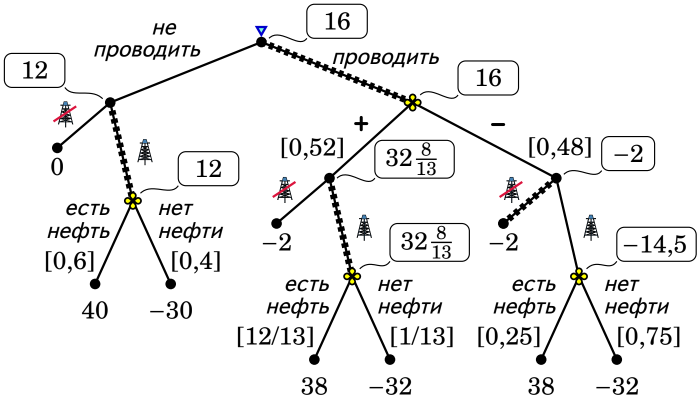


Рис. 1.25. Решение о сейсмическом исследовании и бурении — «вывернутое» дерево решений

- Эти исходные вероятности надо нормировать к единице (т. е. использовать правило Байеса), разделив их на общую вероятность попадания в информационное множество.
- Выявить оптимальные действия в данном информационном множестве, т. е. дающие максимальный ожидаемый выигрыш по рассчитанным условным вероятностям. Заменить информационное множество на конечные вершины, приписав этим вершинам соответствующий ожидаемый выигрыш.

Глава 2

Введение в теорию игр

Предмет теории игр. Проблема принятия решений при взаимодействии нескольких лиц. Концепция решения игры. Развернутая форма и дерево игры. Действия, стратегии, исходы и выигрыши. Нормальная форма игры. Различие между кооперативными и некооперативными играми. Парето-оптимум игры. Трансферабельные и нетрансферабельные выигрыши. Понятие торга, точка угрозы (статус-кво), контрактная кривая. Аксиоматический подход к торгу: решение Нэша. Коалиции, блокирование, ядро (C-ядро). Игры с трансферабельной полезностью: характеристическая форма. Ядро для игр в характеристической форме.

2.1. Введение

Игры — это математические модели стратегических ситуаций принятия решений, включающих взаимодействие. Во взаимодействие вовлечены различные действующие лица (игроки), которые совместно определяют результат, и каждый старается получить тот результат, который является с его точки зрения наилучшим.

В зависимости от действий, предпринятых игроками, реализуется некоторый исход; у игроков имеются предпочтения на этих исходах и обычно существует конфликт интересов, поскольку различные игроки предпочитают различные исходы. Поэтому каждый игрок сталкивается с вопросом о том, какие действия являются для него наилучшими. Поскольку игроки взаимозависимы, то ответ на этот вопрос будет зависеть не только от собственных предпочтений игрока, но и от того, как действуют другие игроки. Следовательно, игрок должен делать предсказания по поводу того, что будут делать другие игроки. Человек, который в игре не участвует, может поставить перед собой близкий вопрос о предсказании общего исхода игры. Основываясь на предположении о рациональном поведении всех участвующих игроков, теория игр дает набор инструментов и концепций, с помощью которых можно получить ответы на эти вопросы. Описанная проблема возникает в самых разных обстоятельствах, начиная от салонных игр (шахмат, карточных игр) до различных экономических, политических, военных или биологических ситуаций. Теория игр предлагает набор формальных моделей и концепций, которые можно использовать для анализа подобных ситуаций.

Таким образом, основной целью теории игр является предсказание поведения игроков и отыскание некоторого наиболее правдоподобного исхода (или множества исходов) игры. **Концепцией решения** (не путать с принятием решений!) называют правило, которое позволяет по данному описанию игры получить такие предсказания. По-видимому, концепция решения должна удовлетворять следующим условиям:

- давать предсказания, согласующиеся с эмпирическими наблюдениями и интуицией;
- быть достаточно универсальной и приложимой к широкому кругу практически интересных ситуаций;
- предсказывать в большинстве случаев единственный исход.

Найти концепцию, удовлетворяющую одновременно всем этим условиям, представляется невозможным. Различные существующие теории, концепции и подходы являются, таким образом, теоретическими компромиссами.

2.2. Методологический индивидуализм

При анализе поведения группы индивидуумов, теория рационального выбора, обсуждавшаяся нами ранее, тесно связана с методологическим индивидуализмом. «Методологический» добавляют, чтобы не было путаницы с индивидуализмом в этическом смысле: если человек придерживается методологического индивидуализма, это вовсе не означает, что он ведет себя откровенно эгоистично или призывает вести себя так; это просто исследовательская точка зрения на движущие силы поведения людей.

Методологический индивидуализм постулирует, что единственная аналитическая единица, которая существует — это индивидуум. Согласно этому подходу, наблюдаемые социальные явления следует объяснять с точки зрения взаимодействий между отдельными целополагающими индивидуумами. Противоположные подходы («коллективизм», «холизм»), постулируют, что надиндивидуальные объекты должны быть конечными объясняющими факторами. (Например, согласно марксизму, экономические и социальные явления следует объяснять борьбой классов.)

Не следует думать, что методологический индивидуализм требует, чтобы целое равнялось сумме своих частей. Наоборот, часто анализ в духе методологического индивидуализма призван показать, как сумма частей (взаимодействие индивидуумов) может приводить к результатам, которые не входили непосредственно в их намерения.

Хотя методологический индивидуализм остается идеалом, на который ориентируются при анализе социальных явлений, на практике трудно в полной мере ему следовать. Часто бывает удобнее оперировать надиндивидуальными объектами — странами, фирмами, политическими партиями, домохозяйствами и т. д. Однако, это рассматривается как упрощение или как временная (пока не достигнуто лучшее понимание) мера.

2.3. Развернутая форма игры. Дерево игры

Игры, в которых игроки делают более одного хода, и/или в которых игроки делают ходы по очереди, удобно представить в виде дерева. О такой игре говорят, что она представлена в развернутой форме[1].

Дерево состоит из вершин (узлов) и ветвей (дуг). Вершины дерева соответствуют точкам, в которых игроки принимают решения. Одна из вершин — начальная; с нее стартует игра. Ветви имеют направление и ведут от одной вершины к другой (при этом стрелки обычно не изображают, только дуги). Ветви, выходящие из вершины, представляют альтернативные варианты действий, которые возможно выбрать в этой вершине. Для каждой вершины, кроме начальной, имеется единственная ветвь, которая в нее входит, и единственная

[1]Как и нормальная форма игры, о которой речь пойдет ниже, развернутая форма была впервые в явном виде описана Дж. фон Нейманом.

вершина, которая ей предшествует. При этом цепь предшествующих вершин, построенная из любой вершины, должна заканчиваться в начальной вершине (что предполагает, в частности, отсутствие циклов).

Развернутая форма игры должна включать также множество игроков и множество информационных множеств. На дереве игры для каждой из вершин (кроме конечных) должно быть указано, к какому информационному множеству она принадлежит. (Некоторые информационные множества состоят из одной вершины и для таких вершин информационное множество не изображают в явном виде.) Предполагается, что игрок не может отличить вершины в пределах отдельного информационного множества. Для каждого информационного множества указывается единственный игрок, которому принадлежит в этом множестве ход. Каждой конечной вершине дерева, то есть такой, которая не предшествует ни одной другой вершине, соответствует исход игры и значение полезности (выигрыш) каждого из игроков (кроме «Природы»). Если в игре есть случайные ходы природы, то для каждого такого хода следует также задать распределение вероятностей на множестве всех возможных ветвей (действий природы), начинающихся в соответствующей вершине.

Различие между деревом решений и деревом игры состоит в том, что имеется несколько игроков, и в конечных вершинах следует указывать выигрыши *всех* этих игроков.

Рассмотрим в качестве примера очень простую игру.

Игра 7: Игрок 1 прячет некий мелкий предмет в левой или правой руке (*Л* или *П*). Игрок 2 угадывает, в какой руке предмет (*Л* или *П*). Если Игрок 2 угадал, то его выигрыш равен 1, а выигрыш Игрока 1 равен -1. Если Игрок 2 не угадал, то его выигрыш равен -1, а выигрыш Игрока 1 равен 1. ⊙

Дерево этой игры изображено на Рис. 2.1. В начальной вершине, показанной значком ▿, ход принадлежит Игроку 1. Информационное множество, отражающее информацию, которой обладает Игрок 2, изображено в виде «облака» ⬭. В этом информационном множестве ход принадлежит Игроку 2. Обеим вершинам информационного множества соответствует один и тот же набор допустимых действий. (Игрок 2 должен не иметь возможности отличать правую вершину от левой в том числе и по действиям).

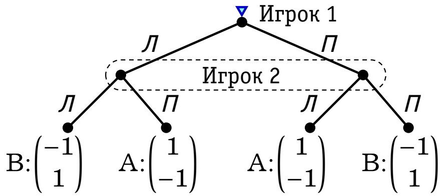


Рис. 2.1. Дерево для Игры 7

2.4. Нормальная форма игры

Самая простая разновидность игр — это игры, в которых отсутствует какая бы то ни было динамика: каждый игрок должен принять только одно решение, и решения, по существу, делаются одновременно, поскольку ни один из игроков не знает, какое решение было принято любым другим игроком. Примером такой ситуации может являться аукцион с заявками в запечатанных конвертах: не зная, каковы предложения конкурентов, каждый из игроков указывает в запечатанном конверте цену; игрок, сделавший самое выгодное предложение (указавший наибольшую цену), получает продаваемый на аукционе предмет за указанную им цену. Игра такого рода называется статической игрой.

Для описания статических игр развернутая форма игры не очень удобна. Такие игры проще всего задавать в нормальной (стратегической) форме. Приведем пример подобного описания.

Игра 8 («Выбор компьютера»): Двое знакомых одновременно выбирают, компьютеры какого типа им купить. Первый предпочитает IBM PC, второй — Макинтош. Обладание компьютером любимого типа первый оценивает в a ($a > 0$) некоторых условных единиц, а второй — в b ($b > 0$) условных единиц. Полезность компьютера другого типа для обоих равна нулю. Каждый получает дополнительную выгоду ($c > 0$), если они выберут одинаковые компьютеры, поскольку в таком случае используемое ими программное обеспечение будет совместимым. ⊙

В этом примере каждый из игроков (мы будем их называть «Игрок 1» и «Игрок 2») имеет два возможных действия, которые можно условно назвать *«IBM»* и *«Mac»*. Описанную игру удобно представить в виде таблицы (матрицы) 2×2. В игре имеется четыре исхода: (IBM,

IBM), (IBM, Mac), (Mac, IBM) и (Mac, Mac). Каждому исходу соответствует своя клетка таблицы; в этой клетке помещаются соответствующие выигрыши участников

Игры такого рода, то есть игры с двумя участниками, каждый из которых имеет конечное число действий, принято называть **биматричными**. Мы будем использовать следующее соглашение при изображении биматричных игр двух лиц. Игрок, чье имя стоит *слева*, выбирает *строки* таблицы и его выигрыши записываются *в левом нижнем углу* каждой клетки таблицы. Игрок, чье имя стоит *сверху*, выбирает *столбцы* таблицы и его выигрыши записываются *в правом верхнем углу*. При таком расположении проще понять где чьи действия и где чей выигрыш. Свой выигрыш всегда расположен ближе к игроку, чем чужой выигрыш. В Таблице 2.1 Игра 8 представлена в подобном биматричном виде. (Биматричное представление игры часто называют просто матричным.)

Таблица 2.1. Игра 8 «Выбор компьютера» в (би-)матричном виде

		Игрок 2	
		IBM	*Mac*
Игрок 1	*IBM*	c $a+c$	b a
	Mac	0 0	$b+c$ c

В рассмотренном примере можно выделить три элемента:
- множество игроков,
- множество действий, которые могут выбрать игроки,
- выигрыши игроков (точнее функции выигрыша, сопоставляющие исходам выигрыши).

Описание игры в виде такого набора и называется **нормальной** формой игры. В более сложных типах игр становятся важными и другие аспекты анализируемой ситуации, такие как очередность ходов, информированность игроков, и т. д., и для описания таких игр может понадобиться развернутая форма.

Мы рассмотрели нормальную форму для самых простых игр, в которых игроки выбирают одновременно из некоторого заданного набора действий. Можно ли задать нормальную форму для более сложных игр, например динамических? Можно ли игру в развернутой форме свести к игре в нормальной форме? Да, можно, и в дальнейшем мы подробно разберем как это делать и какие при этом воз-

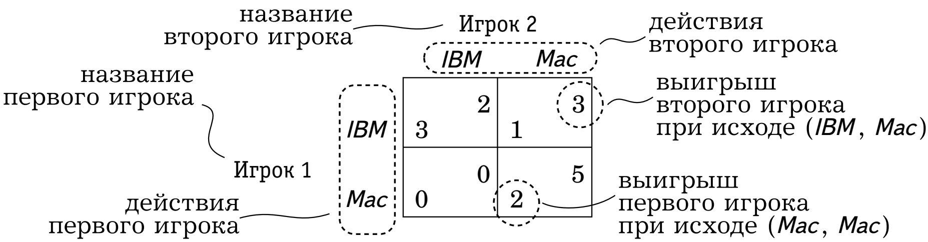


Рис. 2.2. Игра «Выбор компьютера» ($a = 1$, $b = 3$, $c = 2$) и ее элементы

никают проблемы. Пока же мы только укажем, что основная идея подобного представления игры состоит в том, чтобы вместо действий рассматривать так называемые **стратегии**. Если игра достаточно простая, то стратегия будет совпадать с действием, но для сложных игр эти понятия существенно различаются.

Концепция стратегии была введена фон Нейманом[2]. Это одно из основных понятий теории игр. Стратегия игрока — это полный план действий, который задает для каждого информационного множества игрока действие, которое этот игрок намеревается выбрать, если окажется в этом информационном множестве. Это настолько исчерпывающий план поведения в игре, что он не может быть нарушен действиями противника или природы, так как ответ на любую ситуацию, которая может возникнуть в результате таких действий, является частью стратегии. Игрок смело может поручить кому-то другому действовать вместо себя в игре в соответствии с выбранной им стратегией.

Конечно, мы привыкли к тому, что игрок принимает решение о своем ходе в игре только на несколько ходов вперед, а иногда даже только в тот момент, когда он должен сделать данный ход. На практике это так и должно быть, поскольку, например, в таких играх, как шахматы, число возможных ходов настолько велико, что нельзя заранее запланировать свои действия, с учетом всех возможных обстоятельств. Однако при формальном моделировании многих явлений удобно абстрагироваться от данного практического ограничения и предполагать, что уже до начала игры каждый игрок решил, что он будет делать в каждом случае.

Следует отметить, что стратегия часто предусматривает опреде-

[2]См. [14].

ленные действия даже в таких ситуациях, которые не могут возникнуть из-за действий игрока по этой же стратегии кроме как в случае ошибки. Таким образом, понятие стратегии может показаться во многих случаях не очень интуитивно ясным.

В то же время (и примеры этого мы не раз увидим в дальнейшем), само понятие стратегии является очень важным, и важно как раз то, что стратегия задает действия в ситуациях, которые могут не возникать при данном выборе стратегий игроками. Так, например, наличие сильного вооружения у страны влияет не только на ее возможности во время войны, оно также серьезным образом влияет на ее взаимодействие с другими странами в мирное время.

Таким образом, при мы будем часто анализировать игры так, как если бы игра была продумана игроками заранее и заранее, до того, как начинается игра, каждый из игроков выбрал определенную стратегию. Так как стратегии абсолютно исчерпывающие, то набор стратегий всех игроков однозначно определяет исход игры. Это означает, что развернутую форму можно свести к более «прямолинейной» нормальной форме. Именно поэтому нормальную форму игры называют также **стратегической формой**.

Опишем более формально нормальную (стратегическую) форму игры.

Пусть $I = \{1,\ldots,n\}$ — множество игроков (за исключением «Природы») и пусть s_i — стратегия игрока i. Стратегия игрока i (s_i) должна принадлежать множеству его допустимых стратегий S_i. Набор стратегий всех игроков $\mathbf{s} = (s_1,\ldots,s_n)$ называют **профилем стратегий**.

Профиль стратегий однозначно задает некоторый **исход игры**. Например, в шахматах исходами могут быть выигрыш или проигрыш той или другой стороны, а также ничья. Типичный исход игры мы будем обозначать через O, а множество всех возможных исходов — через $\mathscr{O}$. Часто (например, когда каждому профилю стратегий соответствует один и только один исход) удобно отождествлять исход с профилем стратегий: $O = \mathbf{s}$. В дальнейшем мы часто будем пользоваться этим приемом.

Будем предполагать, что у каждого из игроков есть своя целевая функция — **функция выигрыша** (в экономической теории ее называют **функцией полезности**), которую он стремится максимизировать. Обозначим функцию выигрыша i-го игрока через $u_i(\cdot)$. Каждому исходу игры O она сопоставляет некоторое действительное число — **выигрыш** или **полезность** $u_i(O)$. Когда исход отождествляется с профилем стратегий, функция выигрыша сопоставляет выигрыш $u_i(\mathbf{s})$ каждому профилю стратегий $\mathbf{s} = (s_1,\ldots,s_n)$.

Таким образом, нормальная (стратегическая) форма игры должна включать следующие элементы:

- множество игроков I;
- для каждого игрока i множество его допустимых стратегий S_i;
- для каждого игрока i его функцию выигрыша $u_i(\cdot)$.

В правилах некоторых игр заложен элемент случайности. Если в игре есть такие случайные события, то принято говорить о **случайных ходах природы**. Рассмотрим в качестве примера следующую игру.

Игра 9: В игре участвуют пешеход и автомобилист. Каждый из игроков имеет две стратегии: проявлять осторожность (A) и не проявлять осторожности (B). От выбранных стратегий зависит вероятность дорожно-транспортного происшествия (автомобилист собьет пешехода). Если оба ведут себя неосторожно, то вероятность ДТП равна 1/2, если только один ведет себя неосторожно, то вероятность равна 1/10, а если оба осторожны, то вероятность равна 1/100.

В случае, если произойдет ДТП, то ущерб пешехода составит 1000, а ущерб автомобилиста — 200. Кроме того, осторожное поведение на дороге связано для обоих игроков с издержками, равными 100. ⊙

На примере Игры 9 рассмотрим, каким образом представить в нормальной форме игру, включающую случайность. Для этого нам необходимо задать способ вычисления выигрышей (все остальные элементы нормальной формы здесь уже указаны).

Стандартное предположение теории игр состоит в том, что если выигрыш — случайная величина, то игроки предпочитают действия, которые приносят им наибольший **ожидаемый выигрыш**. Предполагается, что в описании игры случайные выигрыши даны в таком виде, что можно рассчитать их математическое ожидание и использовать в качестве выигрышей в нормальной форме игры. Таким образом, выигрыши выражены в некоторых условных единицах (вовсе не обязательно денежных) и представляют некоторый абстрактный уровень полезности для игрока при данном сочетании стратегий.

Пусть оба участника игры проявляют осторожность, то есть реализовался исход (A, A). Если произойдет столкновение, то выигрыш пешехода составит (−1100), а выигрыш водителя — (−300). В противном случае выигрыш пешехода составит (−100), а выигрыш водителя — (−100). Ожидаемые выигрыши равны в этом случае

$$\frac{1}{100}\cdot(-1100)+\frac{99}{100}\cdot(-100)=-110 \text{ — для пешехода,}$$

Таблица 2.2. Матрица для Игры 9

Пешеход \ Автомобилист	*A*	*B*
A	−110, −102	−200, −20
B	−100, −120	−500, −100

$$\frac{1}{100}\cdot(-300)+\frac{99}{100}\cdot(-100)=-102 \text{ — для автомобилиста.}$$

Аналогичные вычисления нужно провести для трех других исходов. Рассчитанные выигрыши представлены в Таблице 2.2.

Заметьте, что полученная нормальная форма игры не содержит информацию о случайных ходах природы, их вероятностях и соответствующих выигрышах.

2.5. Кооперативное игры: постановка проблемы

Какой исход мог бы быть выбран сообществом игроков *в целом*? Ответ на это вопрос не так прост, как может показаться. Мы рассмотрим эту проблему в случае игр, в которых допускается кооперирование между игроками. Это значит, что могут заключаться совместные соглашения, что допускается совместный выбор стратегий и, тем самым, совместный выбор исхода.

Игра 10 («Простой обмен»): У Даши есть фломастер, а у Гоши яблоко. Даша оценивает фломастер в 8, яблоко в 10. Гоша оценивает фломастер в 12, яблоко в 5. Оба игрока могут выбрать одно из двух действий: оставить свою вещь при себе или же отдать другому игроку. Если один игрок получает обе вещи, то его оценки складываются, а выигрыш другого игрока нулевой. ⊙

Вообще говоря, в каждой игре имеется некоторое множество исходов $\mathcal{O}$. В Игре 10, например, имеются следующие четыре исхода:

- у Даши фломастер, у Гоши яблоко;
- у Даши фломастер и яблоко, у Гоши ничего;
- у Даши ничего, у Гоши фломастер и яблоко;
- у Даши яблоко, у Гоши фломастер.

Если игроки действуют совместно, то они могут реализовать по желанию любой возможный исход из множества $\mathcal{O}$. Задача состоит

Таблица 2.3. Игра 10 «Простой обмен»

		Гоша	
		оставить	*отдать*
Даша	*оставить*	5 8	0 18
	отдать	17 0	12 10

в том, чтобы из множества $\mathscr{O}$ выбрать исход, который в некотором смысле будет удовлетворять всех игроков. Как обычно, предполагается, что игроков интересуют не сами по себе исходы O из множества $\mathscr{O}$, а выигрыши (полезности), которые они получают в этих исходах, т. е. $u_i(O)$. Рассматривая возможности кооперации, мы можем забыть об исходах и сосредоточится на полезностях. Множество исходов $\mathscr{O}$ можно отобразить в векторы выигрышей игроков, т. е. в n-мерное пространство векторов $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Вектор выигрышей $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ мы будем называть **дележом**. Исход игры мы хотим охарактеризовать при помощи соответствующего дележа. Если O — исход игры, то этот исход порождает дележ $\mathbf{u} = \mathbf{u}(O)$ — это n-мерный вектор, компоненты которого представляют выигрыши игроков в этом исходе, т. е. $\mathbf{u}(O) = (u_1(O), u_2(O), \ldots, u_n(O))$. Дележ $\mathbf{u}$ называется **допустимым** (возможным), если существует какой-нибудь исход O, который его порождает. Это дележ который физически возможно осуществить. Множество допустимых дележей будем обозначать через $\mathscr{U}$.

Для Игры 10 мы можем изобразить дележи в виде точек (u_1, u_2), где u_1 — выигрыш Даши, а u_2 — выигрыш Гоши. Каждому из четырех возможных исходов соответствует одна точка. В рассматриваемой игре все векторы выигрышей разные, поэтому точки друг на друга не накладывается и в целом дележей столько же, сколько исходов (см. Рис. 2.3).

Можно предположить, что в Игре 10 есть также не отраженные явно возможности по произвольному уменьшению выигрышей. Например, Даша и Гоша могут выбросить часть яблока или поколотить друг друга. Тогда вместе с дележом (u_1, u_2) множество $\mathscr{U}$ должно включать также любой дележ (u'_1, u'_2) такой что $u'_1 \le u_1$ и $u'_2 \le u_2$. Соответствующая модификация множества дележей для Игры 10 показана на Рис. 2.4.

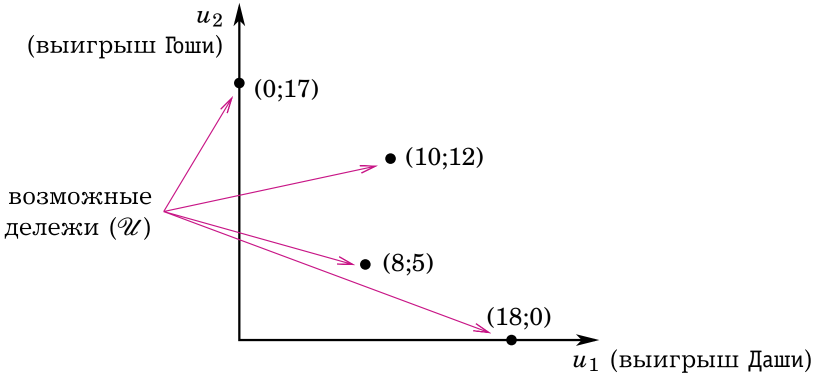


Рис. 2.3. Множество дележей в Игре 10

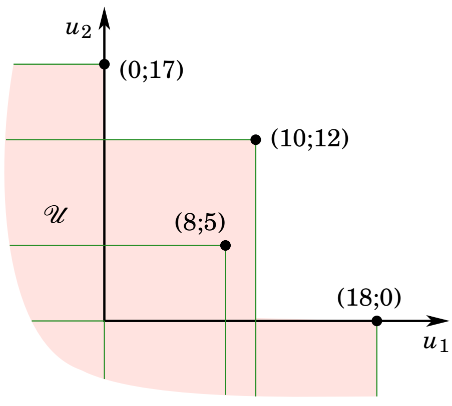


Рис. 2.4. Множество дележей в Игре 10 при наличии возможности произвольного ухудшения положения игроков

По-видимому во многих ситуациях исход игры, соответствующий кооперации игроков, можно выразить в терминах соответствующего дележа. Задача состоит в том, чтобы из множества дележей $\mathscr{U}$ выбрать дележ, который будет удовлетворять всех игроков.

Игру называют кооперативной, если игроки могут заключать соглашения, причем

- механизмы заключения соглашений не моделируются в явном виде в рамках правил игры;
- соглашения носят обязывающий характер (игрок не может отказаться от сотрудничества, если он уже обещал).

В кооперативной игре может быть достигнут любой допустимый исход, если игроки заключат соответствующее соглашение.

С другой стороны, игру называют некооперативной, если не существует возможностей для взятия на себя обязательств (односторонних или многосторонних), от которых нельзя впоследствии отказаться, кроме тех, которые явным образом включены в описание игры.

Если обязывающие соглашения невозможны, то возникновение сотрудничества проблематично. Например, в Игре 10 рациональные игроки вряд ли выберут пару стратегий (*отдать*, *отдать*). Даже если бы они договорились использовать такие стратегии, то каждый из них не мог бы рационально ожидать, что другой игрок будет придерживаться этого соглашения. А это совершенно лишает смысла любое подобное соглашение. Предположим, что Даша предполагает, что Гоша будет придерживаться этого соглашения и отдаст ей яблоко. Но зачем ей самой при этом отдавать фломастер, если ее выигрыш будет меньше? Похожим образом может рассуждать и Гоша. Набор стратегий (*отдать*, *отдать*) не является устойчивым.

В реальной жизни принудительное исполнение соглашений внешне обеспечивается судами, государственными организациями и давлением общественного мнения. Внутренне их исполнение может быть обеспечено нежеланием нарушать соглашения по моральным причинам.

Важный класс игр — это игры с побочными платежами или, как еще говорят, с трансферабельной полезностью. Пусть полезности оцениваются в единицах, общих для всех игроков (в «деньгах»), и каждый из них имеет право передать часть своего выигрыша другому игроку. Тогда игроки могут договариваться о помощи друг другу за счет передачи выигрыша (за счет побочных платежей) — если есть игроки, которые могут сильно помочь другим игрокам, то эту помощь можно купить, передав взамен часть выигрыша, полученного благодаря такой помощи.

Пусть, например, в Игре 10 выигрыши выражены в рублях, и Даша и Гоша могут передавать друг другу не только предметы, но и деньги. Если они обменялись своими предметами, то их выигрыши будут равны (10; 12). Если, дополнительно, Даша передаст Гоше рубль, то выигрыши будут равны (9; 13). Если Даша передаст Гоше z рублей, то выигрыши будут равны $(10-z; 12+z)$. Случай $z<0$ будет означать передачу денег от Гоши к Даше. Таким образом, если нет ограничений на количество денег, то игрокам доступны любые дележи вида $(10-z; 12+z)$, где z — произвольное действительное число. Это прямая, проходящая с северо-запада на юго-восток. Если, к тому же, игроки могут «выбрасывать деньги на ветер», то все точки, лежащие левее и ниже этой прямой, тоже представляют собой допустимые дележи. В целом множество допустимых дележей выглядит так, как изображено на Рис. 2.5.

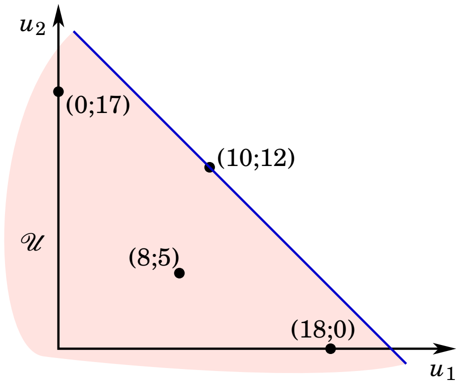


Рис. 2.5. Множество дележей в Игре 10 при трансферабельности выигрышей

В общем случае в игре с трансферабельной полезностью и возможностью произвольно уменьшать выигрыши если дележ $(u_1,\dots,u_n)$ является допустимым, то и любой дележ $(u'_1,\dots,u'_n)$, такой что $\sum_{i\in I} u'_i \le \sum_{i\in I} u_i$ является допустимым. (Чтобы получить второй дележ из первого, можно, например, уменьшить выигрыш одного из игроков на величину $\sum_{i\in S} u_i - \sum_{i\in S} u'_i$, а затем произвести побочные платежи.)

Как нетрудно понять, игры с трансферабельными выигрышами можно охарактеризовать числом $v(I)$ — это максимум суммы выигрышей всех игроков $\sum_{i \in I} u_i$ по всем допустимым дележам $\mathbf{u} \in \mathscr{U}$. Если можно произвольно уменьшать выигрыши («выбрасывать деньги на ветер»), то число $v(I)$ однозначно задает множество $\mathscr{U}$. А именно, дележ $\mathbf{u}$ допусти́м ($\mathbf{u} \in \mathscr{U}$) тогда и только тогда, когда сумма выигрышей всех игроков не превышает $v(I)$ ($\sum_{i \in I} u_i \leq v(I)$).

2.6. Оптимальность по Парето

В этом разделе мы рассмотрим важную для экономических приложений концепцию Парето-оптимальности в контексте теории игр.

Тот или иной механизм координации решений отдельных игроков (в том числе механизм достижения соглашений) принято оценивать на основе результатов его работы, т. е. характеристик тех исходов, к которым он приводит, безотносительно самого по себе процесса координации. В духе традиции методологического индивидуализма считается, что подобная оценка исходов должна строится на основе выигрышей отдельных игроков и ни на чем ином.

Но при сравнении разных исходов возникает следующая трудность. Если мы рассматриваем отдельного игрока, то можем судить о том, насколько хорош исход, по тому выигрышу, который он получит. Однако, если игроков несколько, то их интересы зачастую не совпадают. Возможно ли вообще какое-либо правило коллективной рациональности? Если сравнивать два исхода, O_1 и O_2, то для одного игрока O_1 может быть предпочтительнее O_2, а для другого наоборот. Только если мнения всех игроков совпадут, то имеет смысл говорить о том, что один исход *с точки зрения данного сообщества игроков в целом* предпочтительнее другого, и, следовательно, этот другой исход им не подходит. Данный тезис лежит в основе критерия оптимальности, сформулированного Парето.

Оптимумы Парето характеризуются тем, что невозможно одновременно увеличить полезность для всех игроков, или, иначе говоря, тем, что не существует допустимого распределения, которое игроки единодушно предпочитают.

Говорят, что исход $O' \in \mathscr{O}$ **доминирует по Парето** исход $O \in \mathscr{O}$ (является **Парето-улучшением** по сравнению с O), если в нем каждый игрок получает выигрыш не меньше, чем в исходе O, а хотя бы один из игроков получает выигрыш строго больше, чем в O, т. е.

$$u_i(O') \geq u_i(O) \ \text{ для всех игроков } i,$$

и

$$u_j(O') > u_j(O) \ \text{ для некоторого игрока } j.$$

В Игре 10 исход, когда Даша и Гоша оставляют свои предметы у себя, доминируется исходом, когда они оба отдают свои предметы друг другу. На Рис. 2.6 показано такое Парето-улучшение. В данном случае это **строгое Парето-улучшение**, поскольку все игроки строго улучшили свое положение.

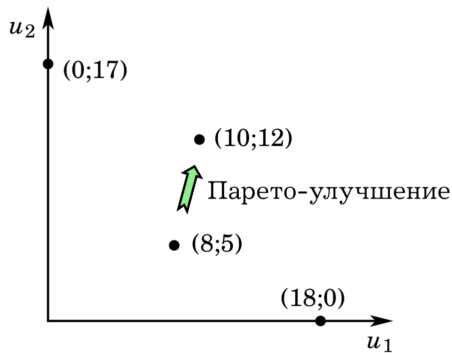


Рис. 2.6. Парето-улучшение в Игре 10

Исход $\hat{O} \in \mathscr{O}$ называется **Парето-оптимальным**, если не существует другого исхода $O' \in \mathscr{O}$, такого что он доминирует $\hat{O}$ по Парето. Множество всех Парето-оптимальных исходов называют **границей Парето**.

В случае двух игроков, множество дележей $\mathscr{U}$ и Парето-границу можно изобразить графически. Точка L на Рис. 2.7(a) не является Парето-оптимальным дележом, поскольку в прямом угле, направленном вправо-вверх, помимо точки L содержатся еще и другие точки множества дележей $\mathscr{U}$. Точка M соответствует Парето-оптимальному дележу, поскольку соответствующий ей прямой угол не содержит точек множества $\mathscr{U}$ за исключением самой точки M.

Если множество дележей для игры двух лиц представляет собой некую связную фигуру, то оптимальные по Парето дележи должны располагаться на границе множества $\mathscr{U}$, обращенной вправо вверх (см. Рис. 2.7(b)).

Игра 11: Трое друзей, Антон, Борис и Виктор, решают, куда им пойти вместе на выходные. Имеются следующие варианты: кино, бар, боулинг, сауна, рыбалка, хоккей. Друзья имеют следующие предпо-

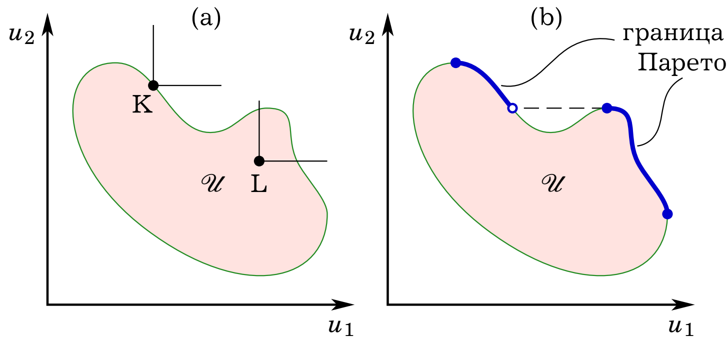


Рис. 2.7. Парето-граница для множества дележей $\mathscr{U}$

При каких условиях на параметры в Игре 8 исход (IBM, Mac) является Парето-оптимальным, а при каких нет?

Найдите Парето границу в Игре 9.

чтения в отношении этих вариантов:

Антон: боулинг ≻ кино ≻ сауна ≻ бар ≻ рыбалка ≻ хоккей,

Борис: боулинг ≻ хоккей ≻ кино ∼ бар ≻ рыбалка ≻ сауна,

Виктор: кино ≻ бар ≻ рыбалка ≻ боулинг ≻ сауна ∼ хоккей. ⊙

На основе указанных предпочтений можно каждому из исходов приписать некий подходящий уровень полезности. Например, можно нумеровать альтернативы натуральными числами, начиная с худшей. Такой вариант задания функций полезности игроков представлен в Таблице 2.4.

Альтернатива *кино* доминирует по Парето альтернативу *бар*. Действительно, Антон и Виктор получают более высокую полезность от *кино* ($5 > 3$ и $5 > 4$ соответственно), а для Бориса эти альтернативы эквивалентны ($3 = 3$). Альтернатива *боулинг* строго доминирует по Парето альтернативу *хоккей* ($6 > 1$, $5 > 4$ и $2 > 1$). *Кино* и *боулинг* строго доминируют по Парето *сауну*. *Кино* строго доминирует *рыбалку*.

Альтернативы *кино* и *боулинг* не сравнимы между собой по критерию Парето — ни одна из них не доминирует другую. Для Антона

Таблица 2.4. Полезности для Игры 11

	кино	*бар*	*боулинг*	*сауна*	*рыбалка*	*хоккей*
Антон	5	3	6	4	3	1
Борис	3	3	5	1	2	4
Виктор	5	4	2	1	3	1

лучше *боулинг*, а для Виктора — *кино*. Таким образом, Парето-граница данной игры — это множество {*кино*, *боулинг*}. Остальные альтернативы следует признать неподходящими для совместного времяпрепровождения.

В играх с трансферабельной полезностью Парето-граница имеет очень простой вид. Как мы видели, дележ $\mathbf{u}$ является допустимым тогда и только тогда, когда $\sum_{i\in I} u_i \le v(I)$. Отсюда следует, что дележ $\hat{\mathbf{u}}$ тогда и только тогда является оптимальным по Парето, когда $\sum_{i\in I} \hat{u}_i = v(I)$.

Рассмотрим дележ $\mathbf{u}$, такой что $\sum_{i\in I} u_i < v(I)$. Покажем, что для этого дележа найдется Парето-улучшение. Введем обозначение $\Delta = v(I) - \sum_{i\in I} u_i$ и рассмотрим дележ $\tilde{\mathbf{u}}$, для которого $\tilde{u}_i = u_i + \varepsilon$, где $\varepsilon \le \Delta/n$. Здесь Δ — это разность между максимально достижимым суммарным выигрышем и суммарным выигрышем для дележа $\mathbf{u}$. Эту разность или ее часть можно поровну раздать игрокам. Для получившегося в результате дележа выполнено

$$\sum_{i\in I} \tilde{u}_i = \sum_{i\in I} u_i + n\varepsilon \le \sum_{i\in I} u_i + \Delta = v(I),$$

поэтому он является допустимым. В то же время он лучше для каждого из игроков, т. е. $\tilde{\mathbf{u}}$ доминирует $\mathbf{u}$ по Парето. Следовательно, дележ $\mathbf{u}$ неоптимален.

Так в Игре 10 при трансферабельности выигрышей максимально достижимая сумма полезностей равна $v(I) = 10 + 12 = 22$. Дележ $(0;17)$ (оба предмета у Гоши) не является оптимальным по Парето, поскольку, например, дележ $(0+1;17+1)$ является допустимым $(19 < 22)$ и обеспечивает каждому из игроков более высокую полезность. Такое Парето-улучшение можно осуществить, передав одновременно яблоко от Гоши Даше и 6 денежных единиц от Даши Гоше.

С другой стороны, рассмотрим дележ $\hat{\mathbf{u}}$, такой что $\sum_{i\in I} \hat{u}_i = v(I)$. Он является допустимым. Если бы для $\hat{\mathbf{u}}$ существовал другой дележ $\tilde{\mathbf{u}}$, который для всех игроков не хуже $(\tilde{u}_i \ge \hat{u}_i)$, а хотя бы для одного игрока j лучше $(\tilde{u}_j > \hat{u}_j)$, то, суммируя эти неравенства, мы получили бы $\sum_{i\in I}\tilde{u}_i > \sum_{i\in I}\hat{u}_i = v(I)$. Значит, такой дележ $\tilde{\mathbf{u}}$ не является допустимым и не составляет Парето-улучшения для $\hat{\mathbf{u}}$. Следовательно, $\hat{\mathbf{u}}$ невозможно улучшить по Парето.

В заключение укажем, что критерий Парето, конечно, является довольно слабым, поскольку не позволяет сравнивать между собой те исходы, которые не улучшаемы по Парето. Кроме того, критерий Парето игнорирует такие волнующие большинство людей соображения как равенство и справедливость. Как бы то ни было, понятие эффективности (оптимальности) по Парето является одним из ключевых в экономической теории, в других общественных науках, а также в теории игр.

2.7. Задача торга: основные предположения

Процедуру достижения соглашения принято называть торгом (англ. *bargaining*). Рассмотрим, какие компоненты должно включать описание простейшей ситуации торга и какие предположения о результатах торга естественно сделать.

При рассмотрении ситуации торга обычно предполагают, что у каждого игрока i существует минимальное значение выигрыша v_i, который он может себе обеспечить независимо от действий других игроков, если откажется от заключения соглашения. Будем говорить, что дележ $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ удовлетворяет условию участия[3] для игрока i, если $u_i \geq v_i$. С другой стороны, если это условие не выполнено, т. е. $u_i < v_i$ то можно говорить, что дележ $\mathbf{u}$ блокируется игроком i.

Точку $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ принято называть точкой угрозы, точкой несогласия или статус-кво[4]. По смыслу точка угрозы является допустимым дележом ($\mathbf{v} \in \mathscr{U}$). Дележ должен принять значение $\mathbf{v}$, если игроки не придут к соглашению.

Идея состоит в том, что, коль скоро речь идет о сотрудничестве, то следует исключить из рассмотрения любой дележ, при котором некоторые игроки не получают того выигрыша v_i, который они могут себе обеспечить без заключения соглашения.

По-видимому, следует также постулировать, что любое кооперативное решение должно быть оптимальным по Парето. В самом деле,

[3]Это условие также называют условием индивидуальной рациональности. К сожалению, этот термин не очень удачен, поскольку это только одно очень специфическое следствие рациональности отдельного игрока. Поэтому в дальнейшем мы не будем использовать этот термин.

[4]С латинского *status quo* можно перевести как «существующее или сложившееся положение вещей».

если имеется дележ, который может улучшить положение некоторых из игроков, не затрагивая интересы других, то сообщество игроков должно отказаться от текущего дележа в пользу этого более удачного варианта. Другими словами, в играх двух лиц выбранный дележ должен располагаться на границе множества $\mathscr{U}$, обращенной вправо вверх.

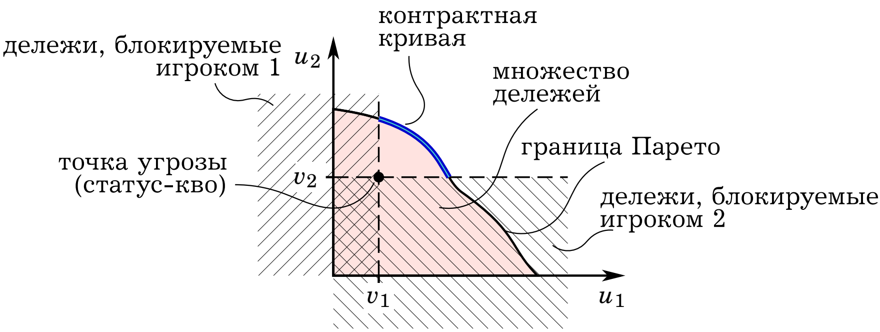


Рис. 2.8. Ситуация торга в случае двух игроков

Таким образом, можно утверждать, что минимальные естественные требования к дележу, который будет выбран при сотрудничестве игроков, должны заключаться в следующем:

- каждый игрок добровольно соглашается сотрудничать с остальными игроками;
- выбранный дележ лежит на Парето-границе.

Множество всех дележей, удовлетворяющих этим двум требованиям принято называть **контрактной кривой** (кривой контрактов) (см. Рис. 2.8).

Найдите в Игре 10 с нетрансферабельными и трансферабельными выигрышами контрактную кривую, предполагая, что точка угрозы — это то, что игроки имеют в исходной ситуации. Изобразите контрактную кривую на графике.

?

Найдите в Игре 11 контрактную кривую, предполагая, что для всех игроков $v_i = 3$.

?

2.8. Торг по Нэшу[5]

По-видимому, компромиссное решение должно быть выбрано на контрактной кривой, если игроки рациональны и действительно заинтересованы в достижении соглашения. Однако, контрактная кривая, вообще говоря, содержит бесконечно много дележей, и возникают сомнения, какой же из них должен быть в конечном итоге выбран.

Можно было бы закончить на этом анализ. Окончательный выбор в значительной мере зависит от специфических обстоятельств, присущих рассматриваемой частной ситуации, в том числе от соотношения сил игроков. Однако в рамках кооперативной теории игр предпринимались попытки создать концепцию, позволяющую выделить определенное решение в случае отсутствия какой бы то ни было дополнительной информации о ситуации. Речь идет о принципах выделения решения, т. е. о нахождении *общего правила* для целой категории ситуаций. Рассмотрим один из подобных подходов; он был предложен Джоном Нэшем[6] для случая игры *двух лиц*.

Какой дележ $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*)$ из множества допустимых дележей $\mathscr{U}$ реализуется в результате торга? Согласно идее Нэша этот дележ должен зависеть только от точки статус-кво $\mathbf{v}$ и от множества $\mathscr{U}$. Общее решение проблемы торга — это функция $\mathbf{c}(\cdot)$, которая должна для заданных $\mathscr{U}$ и $\mathbf{v}$ указывать некоторый вектор $\mathbf{u}^*$ из $\mathscr{U}$:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{c}(\mathbf{v}, \mathscr{U}).$$

Подход Нэша состоял в том, чтобы постулировать набор допущений относительно функции $\mathbf{c}(\cdot)$. Нэш сформулировал следующие пять допущений (аксиом). (Два первых из них мы уже упомянули выше в качестве минимального набора требований к кооперативному решению.)

Допущение 1. Решение $\mathbf{u}^*$ должно быть оптимумом Парето.

Допущение 2. Решение должно удовлетворять условию участия для каждого из игроков[7]. Каждый игрок должен получить выиг-

[5] Данный параграф основан на [1].

[6] См. [12].

[7] Нэш назвал это условие индивидуальной рациональностью, но, как сказано выше, мы сознательно отказываемся от этого неудачного термина.

рыш, не меньший чем тот, который он получил бы в случае отказа от соглашения, т. е. $\mathbf{u}^* \ge \mathbf{v}$.

Допущение 3. Если из множества допустимых дележей $\mathscr{U}$ убрать некоторые из «лишних» дележей, которые не будут выбраны участниками торга, то выбранный ими дележ $\mathbf{u}^*$ не должен поменяться. Другими словами, если множество дележей $\mathscr{U}$ заменить на более узкое множество $\mathscr{W}$ ($\mathscr{W} \subset \mathscr{U}$), которое содержит прежнее решение ($\mathbf{u}^* \in \mathscr{W}$), то решение $\mathbf{u}^* = \mathbf{c}(\mathbf{v}, \mathscr{U})$ не изменится, т. е. будет выполнено $\mathbf{c}(\mathbf{v}, \mathscr{W}) = \mathbf{u}^*$. Это свойство называется независимостью от посторонних альтернатив.

Допущение 4. Решение должно обладать свойством инвариантности по отношению к линейным преобразованиям полезностей. Предположим, что выигрыши игроков в рассматриваемой ситуации торга подвергаются возрастающим линейным преобразованиям[8]. Преобразования задаются парой функций $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ и превращают $\mathscr{U}$ в $\tilde{\mathscr{U}}$, а $\mathbf{v}$ в $\tilde{\mathbf{v}}$. А именно, данное преобразование сопоставляет каждому дележу из множества $\mathscr{U}$ некоторый дележ из множества $\tilde{\mathscr{U}}$ и наоборот:

$$\tilde{\mathbf{u}} = (\varphi_1(u_1), \varphi_1(u_2)) \in \tilde{\mathscr{U}}, \text{ если и только если } \mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathscr{U}$$

и, кроме того, новая точка угрозы рассчитывается как

$$\tilde{v}_i = \varphi_i(v_i), \quad i = 1, 2.$$

Требование инвариантности решения состоит в том, что решение в новой ситуации должно с точностью до преобразования остаться таким же, как в исходной ситуации, т. е. если $\mathbf{u}^* = \mathbf{c}(\mathbf{v}, \mathscr{U})$ — решение в старой ситуации, то $\tilde{\mathbf{u}}^* = \mathbf{c}(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathscr{U}})$ — решение в новой ситуации, где $\tilde{u}_i^* = \varphi_i(u_i^*), \quad i = 1, 2$.

Допущение 5. Решение не изменится, если поменять игроков местами, назвав первого игрока вторым, а второго первым.

Нэш показал, что существует единственная функция $\mathbf{c}(\cdot)$, определенная для всех задач торга и удовлетворяющая перечисленным условиям. А именно, $\mathbf{u}^* = \mathbf{c}(\mathbf{v}, \mathscr{U})$ представляет собой вектор из $\mathscr{U}$, который обеспечивает максимум произведения $(u_1 - v_1)(u_2 - v_2)$ среди допустимых дележей, удовлетворяющих условию добровольности

[8]Под возрастающим линейным преобразованием имеется в виду преобразование, задаваемое функцией вида $\varphi(u) = a + bu$, где $b > 0$.

участия. Другими словами, $\mathbf{u}^*$ является решением следующей задачи:

$$\text{максимизировать } (u_1 - v_1)\cdot(u_2 - v_2) \text{ по } \mathbf{u} = (u_1, u_2)$$
$$\text{при ограничениях } \mathbf{u} \in \mathscr{U} \text{ и } \mathbf{u} \geq \mathbf{v}.$$

Целевую функцию здесь можно интерпретировать как произведение «чистых выигрышей», которые получают игроки от соглашения. Соответствующее решение $\mathbf{u}^*$ называют решением Нэша (или точкой Нэша) для проблемы торга.

В случае трансферабельной полезности множество $\mathscr{U}$ состоит из всех таких точек, которые удовлетворяют неравенству $u_1 + u_2 \leq v(I)$, где, как и раньше, $v(I)$ — максимально возможная суммарная полезность, которую могут получить эти два игрока. Точка Нэша в этом случае находится как решение следующей задачи:

$$\text{максимизировать } (u_1 - v_1)\cdot(u_2 - v_2) \text{ по } u_1 \text{ и } u_2$$
$$\text{при ограничениях } u_1 + u_2 \leq v(I),\ u_1 \geq v_1 \text{ и } u_2 \geq v2.$$

В оптимальном решении должно быть $u_1 + u_2 = v(I)$. При этом можно выразить u_2 через u_1, $u_2 = v(I) - u_1$, и подставить в целевую функцию. Получится задача

$$\text{максимизировать } (u_1 - v_1)\cdot(v(I) - u_1 - v_2) \text{ по } u_1.$$

Решая эту задачу получим, что соответствующим случаю трансферабельной полезности решением Нэша будет точка $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*)$, где

$$u_1^* = \frac{v_1 - v_2 + v(I)}{2} \quad \text{и} \quad u_2^* = \frac{v_2 - v_1 + v(I)}{2}.$$

Можно заметить, что $u_1^* + u_2^* = v(I)$, а $u_2^* - u_1^* = v_2 - v_1$. Таким образом, в этом решении полезности игроков максимально возросли при том ограничении, что разность уровней полезности остается такой же, как и в точке угрозы (так что избыток полезности $v(I) - v_1 - v_2$ делится поровну между игроками). Этот случай иллюстрирует Рис. 2.9.

Приведем также пример нахождения точки Нэша для игры с нетрансферабельными выигрышами.

Игра 12: [6] Двоим людям предлагают 100 долл., если они смогут поделить эти деньги между собой. Предполагается, что первый из них очень богат, а второй имеет капитал всего в 100 долл. Предполагается также, что полезность суммы денег для каждого игрока пропорциональна ее натуральному логарифму. ⊙

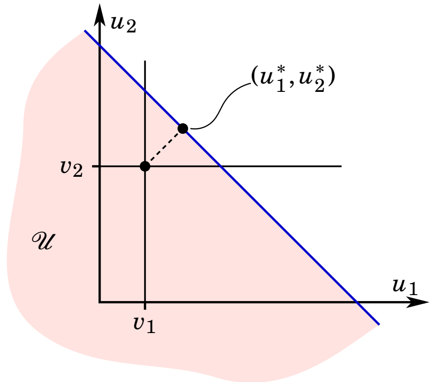


Рис. 2.9. Решение Нэша в случае трансферабельной полезности

Рассмотрим, как должны быть поделены деньги с точки зрения решения Нэша. Исходом игры в данном случае можно считать вектор (x_1, x_2), где x_1 — сумма, которую получит первый игрок, x_2 — сумма, которую получит второй игрок и $x_1 + x_2 \leq 100$.

Пусть богатство первого игрока равно W. Тогда в одиночку, без сотрудничества со вторым игроком, его полезность составит $v_1 = \ln W$. Если же игроки договорятся, и первый игрок получит дополнительно к своему богатству x_1, то его полезность составит $u_1 = \ln(W + x_1)$. Эту полезность можно расписать как

$$u_1 = \ln W + \ln(W + x_1) - \ln W = v_1 + \ln\left(1 + \frac{x_1}{W}\right).$$

Если богатство W очень велико по сравнению с x_1, то относительный прирост богатства x_1/W мал, и мы можем принять следующее приближение[9]:

$$u_1 = v_1 + \frac{x_1}{W}.$$

Второй игрок имеет 100 долл., так что его полезность в состоянии статус-кво равна $v_2 = \ln 100$. Соответственно, если он получит дополнительно x_2 долл., то полезность составит $u_2 = \ln(100 + x_2)$.

В Парето-оптимуме должно выполняться $x_1 + x_2 = 100$ (вся сумма будет поделена между игроками). Из уравнения полезности первого

[9]Как известно из математического анализа, $\ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon$ при малых ε.

> Какой вид имеет множество допустимых дележей $\mathscr{U}$ в Игре 12?

игрока имеем $x_1 = (u_1 - v_1)W$. Отсюда $x_2 = 100 - x_1 = 100 - (u_1 - v_1)W$. Подставив это выражение в функцию полезности второго игрока, получим, что множество дележей $\mathscr{U}$ справа вверху ограничивается дугой, задаваемой уравнением

$$u_2 = \ln(200 - (u_1 - v_1)W).$$

Дуга выгибается вправо вверх. Контрактная кривая состоит из точек, расположенных между этой дугой и точкой угрозы $(\ln W, \ln 100)$.

> Пусть в Игре 12 $x_1 + x_2 < 100$. Предложите Парето-улучшение.

Чтобы найти решение Нэша, надо на указанной дуге найти точку, которая максимизирует произведение $(u_1 - v_1)(u_2 - v_2)$. Подставляя уравнение дуги, получим, что следует максимизировать по u_1 функцию

$$(u_1 - v_1) \cdot (\ln(200 - (u_1 - v_1)W) - \ln 100).$$

Однако в этом примере удобнее выразить полезности через x_1, что приводит к задаче максимизации по x_1 функции

$$\frac{x_1}{W} \cdot \ln\left(\frac{200 - x_1}{100}\right).$$

В максимуме производная этой функции равна нулю. Таким образом, получаем следующее условие первого порядка:

$$\ln\left(\frac{200 - x_1}{100}\right) = \frac{x_1}{200 - x_1}.$$

Решая численно это нелинейное уравнение, найдем, что $x_1 \approx 54{,}4$, то есть в точке Нэша первый игрок должен получить приближенно 54,4 долл., а второй — 45,6 долл.

В некотором смысле этот результат кажется странным; из него вытекает, что богатый игрок должен получить больше, чем бедный, нуждающийся в деньгах. Однако такие рассуждения опираются на сравнение полезностей разных лиц, что противоречит логике, заложенной Нэшем. Решение учитывает, что фактически полезность денег у игрока 2 убывает быстро, а у игрока 1 медленно. В результате получается, что игрок 2 стремится получить хоть что-нибудь и при сделке может уступить игроку 1.

Из допущений Нэша, перечисленных выше, только два первых являются достаточно убедительными. (Предположение об инвариантности к линейным преобразованиям можно принять в случае, когда предпочтения игроков имеют вид Неймана—Моргенштерна.) В связи с этим решение Нэша подвергалось критике с различных позиций. Если принять другие допущения, то можно найти и другие решения, отличные от решения Нэша.

2.9. Коалиции и ядро

Если игроков только двое, то рассмотренные выше условия добровольности участия и Парето-оптимальности — это, по-видимому, всё, что мы можем вывести, исходя только из рациональности игроков, без каких-либо дополнительных соображений. Однако если игроков трое или более, то игроки могут группироваться по разному, образуя коалиции (охватывающие только часть игроков) и заключая соглашения в пределах коалиции. Анализ коалиций представляется очень важным для хорошего понимания взаимозависимостей между игроками, когда их более двух.

Прежде чем дать общие определения, приведем пример, показывающий, что важно учитывать возможность заключать соглашения между частью игроков. Это пример игры с нетрансферабельной полезностью.

Игра 13: Дачи трех игроков расположены по соседству в вершинах прямоугольного треугольника с катетом 120 м. Они рассматривают вариант строительства общей бани стоимостью 150 долл. При этом предполагается, что издержки строительства будут разделены поровну и что побочные платежи невозможны. Выигрыш игрока i равен $u_i = -C_i - L_i$, где C_i — его вклад в строительство бани, а L_i — расстояние от его дома до бани. ⊙

Удобно считать, что три дачи имеют координаты (0;0), (120;0) и (0;120) как на Рис. 2.10(а), а баня имеет некоторые координаты (x, y). Линии уровня (кривые безразличия) игроков представляют собой окружности с центрами в месте расположения дач. Чем ближе к даче игрока, тем выше его выигрыш. Направления улучшения показаны маленькими стрелками. Точка N на рисунке не является оптимальной по Парето. В закрашенной области расположены дележи, которые представляют Парето-улучшение по сравнению с точкой N, поскольку для каждого из трех игроков это более близкие точки, чем N. Одно из возможных (строгих) Парето-улучшений показано стрелкой с зигзагом.

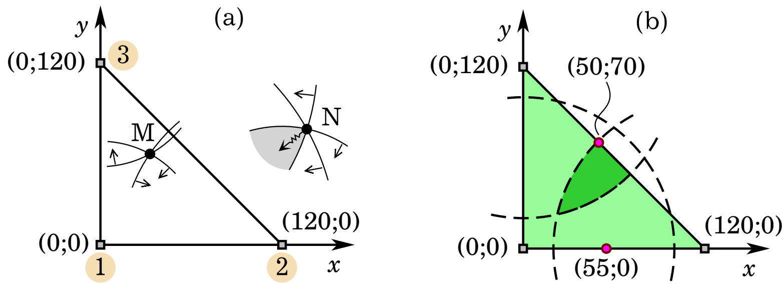


Рис. 2.10. Парето-граница и контрактная кривая для Игры 13

В то же время точка M не предоставляет возможности для Парето-улучшения. Любая другая точка будет дальше от дачи хотя бы одного из игроков. Таким образом, M принадлежит Парето-границе. В целом, как нетрудно догадаться, Парето-граница представляет собой треугольник с вершинами (0;0), (120;0) и (0;120) (см. Рис. 2.10(b)).

Если игрок будет строить баню в одиночку, то она обойдется ему в полную сумму 120 долл. и сможет построить ее в непосредственной близости от дачи. При этом полезность будет равна $v_i = -150$.

Условие участия i-го игрока $u_i \geq v_i$ можно записать как $-50 - L_i \geq -150$ или $L_i \leq 100$. Таким образом, совместная баня должна быть построена в пределах 100 м. от дачи игрока, иначе он не согласиться на совместный проект. Три окружности вырезают из Парето-границы контрактную кривую (см. Рис. 2.10(b)).

Однако не все точки контрактной кривой подходят для заключения соглашения. Например, это точка с координатами (50;70). Она удовлетворяет условиям участия, поскольку приносит игрокам выигрыши, превышающие -150:

$$u_1 = -50 - \sqrt{50^2 + 70^2} \approx -136{,}02, \quad u_2 = -50 - \sqrt{70^2 + 70^2} \approx -148{,}99$$

и

$$u_3 = -50 - \sqrt{50^2 + 50^2} \approx -120{,}71.$$

Однако игроки 1 и 2 при таком варианте получают не очень большие выигрыши. Они могут построить баню вдвоем, что обойдется им в 75 долл. на каждого. Выгодно расположить баню на отрезке между их дачами. Если баню расположить в точке $(x,0)$, то выигрыши составят

$$u_1 = -75 - x \quad \text{и} \quad u_2 = -75 - (120 - x).$$

Если, например, выбрать $x = 55$, то оба игрока получат более высокий выигрыш $(-130 > -136{,}02$ и $-140 > -148{,}99)$. Можно сделать вывод, что они не согласятся на строительства бани на троих в точке $(50;70)$.

Формально в теории кооперативных игр **коалицией** называют (непустое) подмножество S множества всех игроков I. Из соображений удобства теоретического анализа коалициями называют и само множество всех игроков, I, и множества $\{i\}$, состоящие из единственного игрока. Таким образом, коалиция — это и все множество I, и отдельный игрок и все возможные случаи между этими двумя крайностями.

В игре с тремя игроками (игре трех лиц) $I = \{1,2,3\}$ — это множество всех игроков. В такой игре возможны следующие коалиции:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}.$$

Дележ $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ называется **допустимым** (возможным) для коалиции S, если коалиция S автономно от остальных игроков, не входящих в нее, может обеспечить своим членам i выигрыши u_i (где $i \in S$). При этом выигрыши остальных игроков никак не ограничиваются (для членов коалиции S важны только собственные выигрыши). Множество допустимых дележей для коалиции S обозначим через $V(S)$. Ясно, что в прежних обозначениях $V(I) = \mathscr{U}$ для коалиции из всех игроков. Множество $V(\{i\})$ для каждого отдельного игрока i может состоять из всех векторов вида $(u_1, \ldots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, \ldots, u_n)$, где u_j при $j \neq i$ — произвольные числа. Если игрок i может произвольно уменьшать свой выигрыш ниже уровня v_i, то $V(\{i\})$ будет состоять из всех векторов $(u_1, \ldots, u_n)$, таких что $u_i \leq v_i$, а u_j при $j \neq i$ произвольные.

В целом описание множеств $V(S)$ для всех коалиций S задает кооперативную игру. Рис. 2.11 иллюстрирует кооперативную игру двух лиц. Очевидна аналогия этой иллюстрации с Рис. 2.8 для ситуации торга.

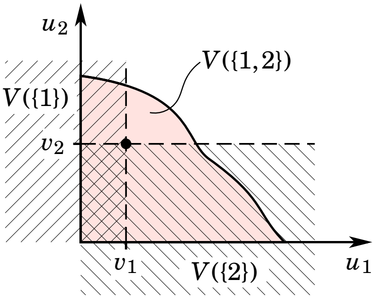


Рис. 2.11. Кооперативная игра двух лиц

Множества $V(S)$ допустимых для коалиций дележей могут рассчитываться, например, на основе некоторого семейства некооперативных игр или на основе некоторой задачи принятия решений.

Условно можно вообразить, что некий арбитр помогает игрокам в выработке соглашения и предлагает дележ $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, так что полезность для игрока i равна u_i. Для того чтобы это предложение было принято, необходимо, прежде всего, чтобы оно было реалистичным, т. е. чтобы это был допустимый дележ для данной игры в целом (для коалиции из всех игроков). Таким образом, дележ должен быть таким, чтобы $\mathbf{u} \in V(I)$.

Далее, игроки не примут предложенный арбитром дележ $\mathbf{u}$, если они сочтут его невыгодным для себя. В частности, как указывалось ранее, необходимо предложить игроку i по крайней мере столько, сколько он может гарантировать себе, действуя в одиночку. Для того, чтобы предложенный дележ был приемлем для всех n игроков, необходимо, чтобы выполнялось $u_i \geq v_i$ для всех i.

Но что если рассматривать не только отдельных игроков, ни и их коалиции? Игроки могут анализировать всевозможные коалиции, и если члены коалиции S поймут, что объединившись и действуя отдельно от остальных они смогут получить больше, чем им предложил арбитр, то они воспользуются этим и откажутся от предложенного дележа.

Если коалиции S выгодно отказаться от дележа $\mathbf{u}$, т. е. если она может обеспечить своим членам более высокие выигрыши, то говорят, что коалиция S блокирует дележ $\mathbf{u}$. Формально коалиция S блокирует дележ $(u_1, \ldots, u_n)$, если существует допустимый для нее дележ $(u'_1, \ldots, u'_n)$, такой что $u'_i \geq u_i$ для каждого игрока i из S и $u'_i > u_i$ по меньшей мере для одного игрока[10] i из S.

Заметим, что если применить указанное определение блокирования к коалиции из всех игроков, взяв $S = I$, то определение блокирования совпадет с определением доминирования по Парето. Любой допустимый дележ, не являющийся Парето-оптимальным, блокируется коалицией из всех игроков.

Мы можем постулировать, что соглашение между игроками приемлемо, если соответствующий дележ

- является допустимым,
- не блокируется ни одной из возможных коалиций.

Множество подобных дележей принято называть C-ядром или просто **ядром**[11]. По-видимому, ядро игры дает приемлемое решение для проблемы заключения совместного соглашения.

По определению все дележи из ядра Парето-оптимальны, то есть ядро является подмножеством границы Парето.

> Какая связь существует между ядром и контрактной кривой? **?**

В игре *с трансферабельной полезностью*[12] коалиция всегда может перераспределить выигрыши между своими членами. Если коалиция S может обеспечить своим членам выигрыши u_i $(i \in S)$, то она также может обеспечить им выигрыши u_i', если только $\sum_{i \in S} u_i' \leq \sum_{i \in S} u_i$ (новая общая сумма выигрышей членов коалиции равна или меньше). Следовательно, в игре с трансферабельной полезностью для описания множества допустимых для данной коалиции дележей, достаточно определить максимальный суммарный выигрыш, которого может достичь эта коалиция (автономно от игроков, не входящих в коалицию). Это будет уже не множество векторов, а одно число.

[10] В этом определении мы предполагаем, что для блокирования достаточно хотя бы одного игрока, выигрыш которого увеличивается (у остальных членов коалиции выигрыши не уменьшаются). Такое определение можно оправдать, например, тем, что в любой игре выигрыши могут быть до некоторой степени трансферабельными, так что игрок, улучшивший свое положение, может поделиться небольшой частью прироста своего выигрыша с другими членами коалиции. Конечно, такие передачи выигрышей желательно в явном виде учесть в множествах $V(S)$, однако это может привести к неоправданному усложнению игры.

[11] C-ядро — это перевод англоязычного термина *core*. Приставку C в русском языке добавляют, чтобы не возникало путаницы с термином *kernel* (K-ядром).

[12] Как и раньше предполагаем, что всегда можно отдельному игроку сделать сколь угодно плохо, не затрагивая остальных игроков.

Обозначим такой максимальный суммарный выигрыш для коалиции S через $v(S)$. Дележ $\mathbf{u}$ будет допустимым для коалиции S тогда и только тогда, когда $\sum_{i\in S} u_i \le v(S)$.

Функцию $v(\cdot)$, сопоставляющую каждой коалиции S максимально достижимый суммарный выигрыш $v(S)$, называют характеристической функцией. Задав такую функцию для кооперативной игры, получим игру в характеристической форме. Для простых игр удобно записывать коалиции без запятых и скобок, как нижний индекс. Например, вместо $v(\{1,2\})$ можно писать v_{12}.

Для игр с трансферабельной полезностью можно переформулировать определение блокирования в более простом виде. Коалиция S блокирует дележ $\mathbf{u}$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i\in S} u_i < v(S)$.

Учитывая переформулировку определения блокирования, можем сказать, что в игре с трансферабельной полезностью ядро представляет собой множество дележей $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, таких что они удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i\in I} u_i \le v(I),$$
$$\sum_{i\in S} u_i \ge v(S) \text{ для всех коалиций } S.$$

Первое условие — дележ из ядра должен быть допустимым, второе — дележ из ядра не блокируется ни одной из коалиций.

Поскольку множество всех игроков I — это тоже коалиция, то $\sum_{i\in I} u_i \ge v(I)$ и первое условие можно записывать в виде равенства:

$$\sum_{i\in I} u_i = v(I).$$

Это условие следует интерпретировать в том смысле, что дележ из ядра должен принадлежать Парето-границе. Если первое условие записать в виде равенства, в условия неблокирования можно не включать коалицию из всех игроков $S = I$.

Рассмотрим пример игры с трансферабельной полезностью и найдем в ней ядро.

Игра 14 (Джаз-оркестр): [2] Владелец ночного клуба в Париже обещает 1000 долларов певцу (S), пианисту (P) и ударнику (D) за совместную игру в его клубе. Выступление дуэта певца и пианиста он расценивает в 800 долларов, ударника и пианиста — в 650 долларов и одного пианиста — в 300 долларов. Другие дуэты и солисты не рассматриваются, поскольку присутствие фортепиано владелец клуба считает обязательным. Дуэт певец — ударник зарабатывает 500 долларов за вечер в одной удобно расположенной станции метро, певец зарабатывает в среднем 200 долларов за вечер в открытом кафе. Ударник в одиночку ничего не может заработать. ⊙

Суммарный доход трех музыкантов максимален (1000) в случае их совместного выступления в ночном клубе. Если певец выступает отдельно от пианиста с ударником, то все втроем они получают $650+200$ долларов, если пианист один выступает в ночном клубе, то $300+500$ долларов. Наконец, суммарный доход равен 800 долларов, если пианист и певец отказываются от участия ударника. Какое распределение максимального общего дохода следует признать разумным, учитывая описанные возможности игроков в смысле частичной кооперации и индивидуального поведения?

Для Игры 14 возможные коалиции можно записать как

$$\{S\}, \{P\}, \{D\}, \{S,P\}, \{S,D\}, \{P,D\}, \{S,P,D\}.$$

Характеристическая форма задается следующими выигрышами:

$$v_S = 200, \quad v_P = 300, \quad v_D = 0,$$
$$v_{SP} = 800, \quad v_{PD} = 650, \quad v_{SD} = 500.$$
$$v_{SPD} = 1000,$$

Вектор $\mathbf{u} = (u_S, u_P, u_D)$ в Игре 14 принадлежит ядру тогда и только тогда, когда

$$u_S + u_P + u_D = 1000,$$
$$u_S + u_P \geq 800, \quad u_P + u_D \geq 650, \quad u_S + u_D \geq 500,$$
$$u_S \geq 200, \quad u_P \geq 300, \quad u_D \geq 0.$$

Это множество можно изобразить в трехмерном пространстве так, как показано на Рис. 2.12. Контрактная кривая (множество Парето-оптимальных дележей, удовлетворяющих условиям участия) имеет следующий вид:

$$\left\{\mathbf{u} = (u_S, u_P, u_D) \,\middle|\, u_S + u_P + u_D = 1000,\ u_S \geq 200,\ u_P \geq 300,\ u_D \geq 0\right\}.$$

Это множество можно изобразить также в двумерном пространстве — пространстве выигрышей первых двух игроков, S и P, (см. Рис. 2.13). Выигрыш третьего игрока вычисляется однозначно по выигрышам первых двух игроков по формуле $u_D = 1000 - u_S - u_P$ (отражающей требование Парето-оптимальности). Учитывая это, можно

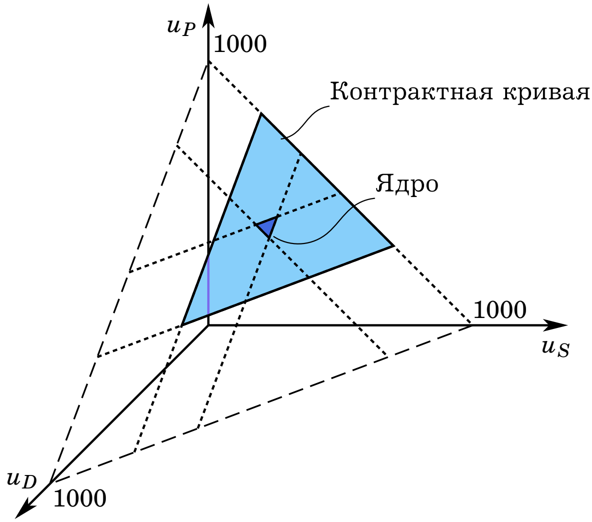


Рис. 2.12. Трехмерная иллюстрация ядра в Игре 14

выразить остальные шесть условий как неравенства для u_S и u_P:

$$u_S + u_P \geq 800, \quad u_P + (1000 - u_S - u_P) \geq 650, \quad u_S + (1000 - u_S - u_P) \geq 500,$$
$$u_S \geq 200, \quad u_P \geq 300, \quad 1000 - u_S - u_P \geq 0$$

или

$$u_S + u_P \geq 800, \quad u_S \leq 350, \quad u_P \leq 500,$$
$$u_S \geq 200, \quad u_P \geq 300, \quad u_S + u_P \leq 1000.$$

В первой строчке здесь перечислены условия, что дележ не должен блокироваться коалициями из двух игроков, а во второй строчке — условия, что дележ не должен блокироваться коалициями из одного игрока (т. е. условия участия). Таким образом, вторая строчка дает условия на контрактную кривую (множество Парето-оптимальных и удовлетворяющих условию участия дележей).

Первая проблема: существуют ли на самом деле в рассматриваемой игре такие дележи, которые принадлежат ядру? Могут и не существовать.

Вторая проблема: если ядро состоит более чем из одного дележа, то какой из них фактически реализуется? Концепция ядра не дает ответа на этот вопрос.

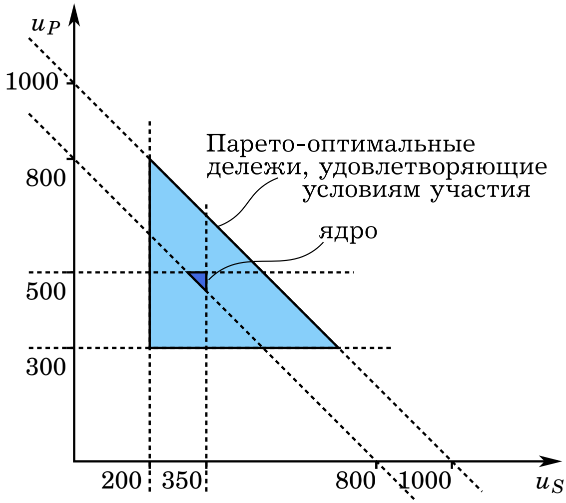


Рис. 2.13. Двумерная иллюстрация ядра в Игре 14

Пусть в Игре 14 ударник в одиночку может заработать некоторую сумму v_D. При каких значениях параметра v_D ядро пусто, а при каких — нет?

2.9.1. Примеры игр с пустым ядром

Существуют игры, ядро которых пусто. Это означает, что для каждого допустимого дележа можно найти коалицию, которая способна его блокировать.

Игра 15 (Наследство): [7] Миллиардер имеет трех племянников. Он завещает свое наследство целиком тому из трех племянников, кого они назовут большинством голосов. ⊙

Логично предположить, что это игра с трансферабельной полезностью. Например, двое из племянников могут договориться голосовать за одного из них с тем, чтобы наследник перечислил половину наследства своему партнеру. Но третий, оставшийся в стороне, возможно, не позволит столь просто это сделать и попытается переманить одного из сообщников, обещая ему бóльшую часть наследства.

Пусть f — размер наследства. Ядро описанной игры — это множество дележей (u_1, u_2, u_3), удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$u_1 + u_2 + u_3 = f,$$
$$u_1 + u_2 \ge f, \quad u_1 + u_3 \ge f \quad u_2 + u_3 \ge f,$$
$$u_1 \ge 0, \quad u_2 \ge 0, \quad u_3 \ge 0.$$

Несложно проверить, что эти неравенства несовместны. Если сложить неравенства для парных коалиций (средняя строчка), то получится

$$2(u_1 + u_2 + u_3) \ge 3f,$$

а это противоречит равенству в первой строчке. Это значит, что любой дележ блокируется хотя бы одной коалицией. Например, симметричный дележ $(f/3, f/3, f/3)$ блокируется коалицией $\{1,2\}$, которая может обеспечить дележ $(f/2, f/2, 0)$. В свою очередь дележ $(f/2, f/2, 0)$ блокируется коалицией $\{2,3\}$, которая может обеспечить дележ $(0, 3f/4, f/4)$.

Игра 16 (Мусор): Имеется n игроков. Каждый из игроков обладает мешком мусора и собственным домом. Игра состоит в том, чтобы забросить свой мешок с мусором в чей-либо двор. Выигрыш игрока — это количество мешков в его дворе со знаком минус.

В этой игре для коалиции из всех игроков выполнено

$$v(I) = -n,$$

т. е. ее выигрыш равен общему числу мешков с мусором со знаком минус. Для коалиции S из k игроков при $k < n$ выигрыш равен

$$v(S) = k - n,$$

поскольку коалиция S может перебросить свой мусор тем игрокам, которые в нее не входят; таких игроков $n - k$, и эти игроки могут отплатить коалиции S тем, что сбросят свои $n - k$ мешков с мусоров во дворы ее членов. ⊙

Легко показать, что ядро этой игры пусто при $n > 2$. Пусть S_{-i} — это коалиция, состоящая из всех игроков, кроме игрока i. Двор игрока i как бы служит свалкой для игроков коалиции S_{-i}. Выигрыш этой коалиции равен минус единице: $v(S_{-i}) = (n-1) - n = -1$ — владелец двора, служащего свалкой, может отомстить только одним мешком с мусором. Чтобы дележ $\mathbf{u}$ принадлежал ядру, требуется, чтобы при этом дележе члены коалиции S_{-i} (при любом i) в сумме получили не менее -1:

$$\sum_{j\in S_{-i}} u_j \geq v(S_{-i}) = -1 \text{ для всех } i$$

Суммируя эти неравенства по всем $i \in I$, получим

$$(n-1)\sum_{i\in I} u_i \geq -n.$$

Множитель $n-1$ появляется здесь из-за того, что в каждой из суммируемых сумм отсутствует выигрыш одного из n игроков. Если дележ принадлежит ядру, то $\sum_{i\in I} u_i = v(I)$, причем по условиям игры $v(I) = -n$. Таким образом, если дележ $\mathbf{u}$ принадлежит ядру, то должно выполняться неравенство

$$-(n-1)n \geq -n.$$

или

$$-(n-1) \geq -1.$$

Получаем, что при $n > 2$ ни один дележ не может принадлежать ядру. Ядро непусто только при $n \leq 2$.

При $n = 2$ в игре «Мусор» ядро будет непусто. Какой вид оно будет иметь?

Для $n = 3$ в игре «Мусор» выпишите все неравенства, которым должен удовлетворять дележ из ядра, и убедитесь, что эти неравенства несовместны. Изобразите ситуацию графически.

2.9.2. Пример ядра в игре с нетрансферабельной полезностью

Выше для Игры 13 был рассмотрен пример того, что коалиция из двух игроков может заблокировать общее соглашение. Если перебрать таким образом все варианты расположения бани, то можно найти ядро этой игры. Ядро изображено на Рис. 2.14. Точки, которые блокируются коалициями из двух игроков, лежат внутри трех эллипсов. Эллипсы отсекают часть контрактной кривой. Оставшаяся фигура представляет собой ядро. Заметим, что это ядро не в дележах, а в исходах.

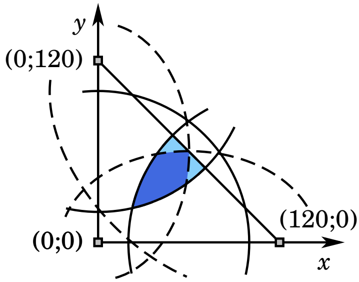


Рис. 2.14. Ядро для Игры 13

2.10. Конституционные соглашения и социальная справедливость

Рассмотрим еще раз Игру 12, в которой два игрока (богатый и бедный) делят 100 долл. Как мы видели, в этой игре точка Нэша оказывается несправедливой — богатый получает больше, чем бедный.

Рассмотрим теперь модификацию этой игры. Пусть игра происходит в два этапа и на первом этапе игроки «принимают конституцию» — т. е. заключают соглашение о том, по каким законам они будут жить на втором этапе. Предполагается, что на первом этапе ни один игрок еще не знает, будет он богатым или бедным. До начала второго этапа природа «бросает монетку» и распределяет роли. Один игрок оказывается богатым (R от англ. *rich*) с богатством W долл., а другой бедным (P от англ. *poor*) с богатством 100 долл., причем игрок может оказаться бедным или богатым с одинаковой вероятностью. Пусть $x_R \in [0;100]$ — сумма, которую получает богатый, а $x_P = 100 - x_R$ — сумма, которую получает бедный. Их полезности на втором этапе будут равны

$$u_R = \ln(W + x_R), \quad \text{и} \quad u_P = \ln(200 - x_R).$$

Пусть на первом этапе они решают, каковы будут величины x_R и x_P. При этом они ориентируются на свои ожидаемые полезности, поскольку еще не знают, в какой окажутся роли. Ожидаемые полезности игроков будут одинаковы и равны

$$U = 0{,}5\ln(W + x_R) + 0{,}5\ln(200 - x_R).$$

Поскольку полезности на первом этапе одинаковы, то игра (по достижению соглашения о величине x_R) оказывается бесконфликтной — интересы игроков полностью совпадают. Очевидно, что они выберут такую величину x_R, чтобы ожидаемая полезность была максимальной. Это соответствует единственному Парето-оптимальному исходу игры.

Производная ожидаемой полезности по x_R равна

$$U' = \frac{1}{2(W + x_R)} - \frac{1}{2(200 - x_R)} = \frac{200 - W - 2x_R}{2(W + x_R)(200 - x_R)}.$$

Поскольку богатство W очень большое, то $200 - W - 2x_R < 0$ при $x_R \in [0;100]$. Соответственно, производная отрицательна и, следовательно, ожидаемая полезность убывает при росте x_R на отрезке $[0;100]$.

Максимум достигается на левом конце отрезка — богатому должно достаться $x_R = 0$, а бедному — $x_P = 100$.

Предположим теперь, что игроки могут договариваться не только о принципах дележа 100 долл., но и о принципах перераспределения всего имеющегося у них богатства. Это означает, что x_R может быть произвольным числом из отрезка $(-W, 200)$. Величина x_R, дающая максимум ожидаемой полезности, в этом случае должна удовлетворять условию $U' = 0$. Значит, она является решением уравнения $200 - W - 2x_R = 0$, т. е.

$$x_R = -\frac{W - 200}{2}.$$

В результате богатство богатого будет равно

$$W + x_R = \frac{W + 200}{2},$$

а бедного —

$$200 - x_R = \frac{W + 200}{2}.$$

Здесь наблюдается «уравниловка»: в результате перераспределения игроки должны иметь одинаковое богатство. Причем можно заметить, что получившийся исход не будет удовлетворять условиям участия первоначальной игры. Дело в том, что добровольность участия актуальна только для для первого этапа. Принятое на первом этапе конституционное соглашение принуждает обоих игроков участвовать в перераспределении, несмотря на то, что одному из них это уже невыгодно (поскольку он оказался богачом).

> Предположите, что первый игрок не знает, в какой роли окажется, а второй знает, что будет богатым. Покажите, что в этом случае игра не будет бесконфликтной и Парето-граница будет состоять более чем из одной точки.
>
> Проанализируйте ту же ситуацию в предположении, что второй знает, что будет бедным.

Результат, который мы получили в частном примере, достаточно общий. Можно предположить, что первоначальное богатство богатого составит W_R, богатство богатого — W_P, а сумма денег которую они будут делить, будет равна A, причем величина W_R достаточно большая, так что $W_R > W_P + A$. В качестве элементарной функции полезности обоих игроков можно взять произвольную дифференцируемую функцию $u(\cdot)$ с положительной и убывающей производной (т. е. полезность возрастает по богатству и игроки являются рискофобами).

Проведите анализ конституционного соглашения в общем случае.

Рассмотренная игра не учитывает один существенный момент. Чтобы приблизить игру к реальности, мы должны учесть, что богатство достается игроку не даром, а он должен его заработать. Игроки от природы обладают разными способностями к зарабатыванию богатства — один более предприимчивый, чем другой. В момент заключения конституционного соглашения они еще не знают, какими способностями их наградила природа. Поразмышляйте над такой игрой. Будет ли конституционный контракт в более сложной игре предусматривать такую же «уравниловку»?

2.11. Сравнение теории кооперативных и некооперативных игр

Вообще говоря, теория кооперативных игр предлагает богатое разнообразие концепций решения. Мы рассмотрели решение Нэша и C-ядро, но есть еще много других подходов[13]. Каждая из этих концепций по своему интересна и имеет некоторое разумное обоснование. Но как группа они не составляют ясной и последовательной теории. Большинство различных концепций решения имеют слабую логическую связность, и поэтому их нельзя интерпретировать как частные случаи обобщающей теории. Кроме того, фактически, ни одна из классических концепций теории кооперативных игр не применима к ситуациям неполной информированности игроков и/или динамическим играм с несовершенной информированностью.

Именно этими сложностями объясняется тот факт, что теория некооперативных игр получила гораздо большее распространение в

[13] Устойчивые множества Неймана—Моргенштерна, вектор Шепли, K-ядро, нуклеолус, переговорные множества Аумана—Машлера, решение Калаи—Смородинского и многое другое.

экономическом моделировании. Теория некооперативных игр позволяет делать достаточно определенные предсказания о том, каков будет исход той или иной игры. Оставшаяся часть курса будет посвящена именно некооперативным играм.

Глава 3

Статические игры с полной информацией

Оптимальный отклик. Концепция доминирования. Равновесие в доминирующих стратегиях. Последовательное отбрасывание строго доминируемых стратегий. Равновесие по Нэшу. Множественность равновесий и фокальные точки. Оптимальный отклик в смешанных стратегиях. Равновесие Нэша в смешанных стратегиях. Гарантированный выигрыш. Игры двух лиц с нулевой суммой.

3.1. Введение

Под **статической игрой** понимают такую игру, в которой все ее участники принимают решения, не зная, какие именно решения принимают другие. Обычно в этом случае говорят, что игроки принимают решения *одновременно*, хотя сама по себе одновременность принятия решений в данном случае не важна. Под играми **с полной информацией** понимаются такие игры, в которых каждый из игроков точно знает характеристики других игроков[1].

[1]Точный смысл терминов *статическая игра* и *игра с полной информацией* станет ясен из дальнейшего, когда мы рассмотрим динамические игры и игры с неполной информацией (байесовские игры) соответственно.

Статические игры с полной информацией имеют довольно простую структуру и в них *стратегия* совпадает с *действием*. Но, как правило, при обсуждении таких игр речь ведут о стратегиях.

Стандартный способ описания *некооперативной* статической игры с полной информацией — это ее нормальная форма. Соответствующие определения и обозначения уже были введены нами выше. Для игры n лиц множество $I = \{1,\ldots,n\}$ — это множество игроков. Через s_i обозначаем стратегию игрока i; стратегия должна принадлежать множеству допустимых стратегий этого игрока S_i. Совокупность стратегий всех игроков называют **профилем стратегий** или **набором стратегий**. То есть профиль стратегий — это

$$\mathbf{s} = (s_1,\ldots,s_n),$$

где $s_1 \in S_1$ — стратегия первого игрока, $s_2 \in S_2$ — второго, и т. д.

3.2. Пример некооперативной игры: ценовая конкуренция

Подчеркнем еще раз различие некооперативной и кооперативной игры. В этом нам поможет пример двух фирм, действующих на одном и том же рынке.

Часто фирма может увеличивать свою прибыль, понизив цены, потому что сокращение цен привлекает новых клиентов. Однако, многие из новых клиентов будут украдены у конкурентов этой фирмы. Конечно, когда все фирмы понижают цены, чтобы переманить друг у друга клиентов, они все от этого проигрывают. Рассмотрим упрощенную игру, которая моделирует подобную ситуацию.

Игра 17 (Ценовая конкуренция двух фирм): Каждая из двух фирм может назначить либо высокую, либо низкую цену, т. е. множества допустимых стратегий двух фирм $i = 1,2$ совпадают:

$$S_i = \{\textit{низкая цена}, \textit{высокая цена}\}.$$

Если обе фирмы назначат высокую цену, то каждая получит прибыль в размере 2 млн руб. Если только одна из фирм назначит высокую цену, то получит убытки в размере 1 млн руб., а конкурирующая фирма — прибыль в размере 3 млн руб. Если обе фирмы назначат низкие цены, то выигрыш каждой будет равен нулю. (См. Таблицу 3.1.) ⊙

Рассмотрим эту игру как некооперативную, т. е. такую, в которой невозможны обязывающие соглашения. В этой игре любая фирма

Таблица 3.1. Ценовая конкуренция, данные для Игры 17

		Игрок 2: *низкая цена*	Игрок 2: *высокая цена*
Игрок 1	*низкая цена*	0; 0	3 млн; −1 млн
	высокая цена	−1 млн; 3 млн	2 млн; 2 млн

получает более высокую прибыль, если назначает низкую цену, чем если назначает высокую цену. Это не зависит от того, что делает другая фирма — назначает низкую или же высокую цену. Если одна из фирм назначит высокую цену, то конкурирующая фирма имеет стимул переманить всех клиентов, назначив низкую цену. Если фирма назначит низкую цену, то конкурирующая фирма потерпит убытки, если тоже не назначит низкую цену. Для обеих компаний назначать низкую цену — это строго доминирующая стратегия (точное определение этого термина мы введем ниже).

Фирмы могут осознавать, что конкуренция является деструктивной, но все равно назначать низкие цены, поскольку в игре не заложена возможность сотрудничества. Если фирмы договорятся о том, чтобы держать высокие цены, но никаких механизмов, побуждающих выполнять договоренности, не существует, то ни одна из фирм, скорее всего, не станет придерживаться договоренностей. Каждая из фирм могла бы сделать вид, что готова выполнять соглашение, а потом, если конкурент установит высокую цену, установить низкую цену и захватить весь рынок.

Реальные фирмы не обязательно будут действовать в логике такой некооперативной игры. Поскольку соглашение о ценах для обеих фирм существенно выгоднее, чем жесткая ценовая конкуренция, то они имеют очень сильные побудительные мотивы найти какой-нибудь способ сделать соглашение о ценах обязательным для выполнения. Одна из функций антимонопольного законодательства состоит как раз в том, чтобы затруднить достижение соглашений между фирмами о поддержании высоких цен. Как правило, современное антимонопольное законодательство большинства стран в явном виде объявляет подобные соглашения незаконными. Таким образом, заключая соглашение о высоких ценах, фирмы подвергают себя риску быть наказанными за нарушение закона. Более того, поскольку соглашение об ограничении конкуренции не будет иметь законной силы, то если одна сторона нарушит подобное соглашение, то другая сторона не сможет подать на нее в суд за нарушение соглашения.

В то же время, следует учитывать, что описанная игра моделирует ситуацию статически. Если анализировать ситуацию в динамике, то выводы могут поменяться. Например, каждая фирма может воздерживаться от понижения цен, опасаясь, что если она нарушит молчаливое соглашение, то будет наказана тем, что другие фирмы сделают то же самое.

3.3. Оптимальный отклик

Игра 18 (Координирование инвестиций): Два партнера ($i = 1,2$) одновременно решают, инвестировать ли в проект или нет. Если *оба* инвестируют, то проект окажется успешным и каждый получит доход 1000. В противном случае проект провалится и каждый получит 0. Инвестиции (вне зависимости от успешности проекта) связаны для отдельного партнера с издержками 1. Каждого из партнеров интересует чистый доход. ⊙

Таблица 3.2. Выигрыши в Игре 18 «Координирование инвестиций»

		Игрок 2	
		инвестировать	*не инвестировать*
Игрок 1	*инвестировать*	$\underline{999}$; $\underline{999}$	-1 ; 0
	не инвестировать	0 ; -1	$\underline{0}$; $\underline{0}$

Окончательные выигрыши показаны в Таблице 3.2. Как уже обсуждалось ранее, в отличие от ситуации принятия решений, когда исход зависит только от действий одного лица, принимающего решения (и еще, возможно, от случайных факторов), в играх нескольких лиц исход зависит от действий всех игроков. Таким образом, то, какие действия являются оптимальными для отдельного игрока, зависит от того, какие действия выбрали остальные игроки. Это можно увидеть на примере Игры 18.

Для игры в нормальной форме можно ввести понятие **наилучшего отклика (оптимального отклика)**. Оптимальный отклик — это стратегия (или стратегии), которые приводят к наилучшему для данного игрока исходу при данных стратегиях других игроков.

Здесь и в дальнейшем мы будем применять обозначение $\mathbf{s}_{-i}$, что означает «все элементы профиля стратегий $\mathbf{s}$, кроме i-го», т. е.

$$\mathbf{s}_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, s_n).$$

При этом будем считать, что $(s_i, \mathbf{s}_{-i})$ — это то же самое, что $\mathbf{s}$. Все такие наборы стратегий $\mathbf{s}_{-i}$ являются элементами множества S_{-i} — множества допустимых стратегий всех игроков, кроме i-го.

Для каждого $\mathbf{s}_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ (набора стратегий всех игроков, кроме i-го) мы можем найти оптимальный отклик i-го игрока, решая задачу

$$\text{максимизировать } u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \text{ по } s_i \in S_i.$$

Будем обозначать оптимальный отклик i-го игрока через $R_i(\mathbf{s}_{-i})$. Если для данного игрока оптимальный отклик непуст и однозначен, то это означает, что можно по стратегиям остальных игроков $\mathbf{s}_{-i}$ однозначно установить, какую стратегию выгодно выбрать i-му игроку. Вообще говоря, стратегия, являющаяся оптимальным откликом на $\mathbf{s}_{-i}$ может не быть оптимальным откликом на другие стратегии $\mathbf{s}'_{-i}$.

В Игре 18 если Игрок 2 решил инвестировать, то Игроку 1 лучше тоже инвестировать, поскольку $999 > 0$. Если же Игрок 2 решил инвестировать, то Игроку 1 лучше тоже не инвестировать, поскольку $-1 < 0$. Так же точно мы можем найти наилучший отклик Игрока 2 на действия Игрока 1. Найденные оптимальные отклики показаны в Таблице 3.2 подчеркиванием выигрышей рассматриваемого игрока.

3.4. Доминирование

Задача теории игр — по данному описанию игры предсказать, какие стратегии выберут игроки и каким при этом будет исход игры, или, по крайней мере, сузить множество прогнозируемых исходов. В некоторых случаях предсказать исход игры можно однозначно, если исходить из предположения о том, что каждый игрок рационален. Примером является Игра 17, рассмотренная выше. Приведем пример еще двух похожих игр. Первая из игр является, пожалуй, самой известной некооперативной игрой, и рассматривалась много раз в литературе по теории игр с различных точек зрения.

Игра 19 (Дилемма заключенных): Двух человек арестовали по подозрению в совершении некоторого преступления. Прокурор предложил каждому следующую сделку. Если он сознается в преступлении, а другой нет, то сознавшийся получает 1 год наказания, а не сознавшийся — 10 лет. Если сознаются оба, то каждый получит по 7 лет. Заключенным также известно, что если никто из них не сознается, то оба получат по 2 года[2]. ⊙

> Представьте Игру 19 в матричном виде. **?**

Игра 20: Проводится телевизионное шоу. Перед двумя участниками шоу стоит следующий выбор. Каждый может потребовать, чтобы ведущий дал тысячу долларов другому игроку, либо потребовать, чтобы он дал сто долларов ему самому. Участники одновременно и независимо делают выбор, после чего ведущий выполняет их пожелания. ⊙

Описанная игра представлена в Таблице 3.3.

Таблица 3.3. Игра 20

		Игрок 2: *\$1000 другому*	Игрок 2: *\$100 себе*
Игрок 1	*\$1000 другому*	1000; 1000	0; <u>1100</u>
	\$100 себе	<u>1100</u>; 0	<u>100</u>; <u>100</u>

Во всех этих трех играх у каждого из игроков есть так называемая строго доминирующая стратегия, т. е. такая стратегия, которая заведомо лучше, чем любая другая его стратегия.

Дадим формальное определение строгого доминирования. Стратегия $s_i \in S_i$ игрока i **строго доминирует** его стратегию $t_i \in S_i$, если при любых стратегиях $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$, выбранных остальными игроками, стратегия s_i лучше, чем стратегия t_i, т. е. выполнено

$$u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) > u_i(t_i, \mathbf{s}_{-i}).$$

Например, в игре Игре 20 стратегия *\$100 себе* строго доминирует стратегию *\$1000 другому*, поскольку $1100 > 1000$ (если другой игрок подарит \$1000) и $100 > 0$ (если другой игрок возьмет \$100 себе).

[2] Цифры у разных авторов разные.

Стратегия называется **строго доминирующей**, если она строго доминирует любую другую стратегию. Другими словами, стратегия $s_i \in S_i$ игрока i является его **строго доминирующей стратегией**, если при любых стратегиях $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$, выбранных остальными игроками, она дает игроку i больший выигрыш, чем любая другая его стратегия $t_i \in S_i$, т. е.

$$u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) > u_i(t_i, \mathbf{s}_{-i})$$

для всех $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$ и всех $t_i \in S_i$, таких что $t_i \neq s_i$.

Определение строго доминирующей стратегии можно дать также с помощью понятия оптимального отклика. Предположим, что при всех $\mathbf{s}_{-i}$ у игрока i имеется одна и только одна стратегия, являющаяся оптимальным откликом, причем при всех $\mathbf{s}_{-i}$ это *одна и та же стратегия*. Тогда эта стратегия является доминирующей стратегией игрока i.

В Таблице 3.3 оптимальные отклики игроков показаны подчеркиванием соответствующих максимальных выигрышей. У каждого игрока отклик однозначен, поскольку в каждом столбце (столбцы соответствуют стратегиям второго игрока) подчеркнут только один выигрыш первого игрока, а в каждой строке (строки соответствуют стратегиям первого игрока) — только один выигрыш второго игрока. Подчеркнутые выигрыши обоих игроков соответствуют одной и той же стратегии *$100 себе*. Таким образом, у каждого из игроков есть строго доминирующая стратегия.

В соответствии с определением строгого доминирования, у игрока не может существовать более одной строго доминирующей стратегии. Естественно ожидать, что рациональный игрок выберет именно такую стратегию. Поэтому при наличии у каждого игрока строго доминирующей стратегии исход игры может быть предсказан однозначно.

Предсказание исхода игры не столь однозначно, когда у каждого игрока имеется лишь так называемая (слабо) доминирующая стратегия, обеспечивающая этому игроку не меньший выигрыш, чем любая другая его стратегия при любых стратегиях других игроков. Приведем определение (слабого) доминирования.

Стратегия $s_i \in S_i$ игрока i (слабо) **доминирует** стратегию $t_i \in S_i$ (или, другими словами, стратегия t_i доминируется стратегией s_i), если при любых стратегиях, выбранных остальными игроками, $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$, , стратегия s_i не хуже, чем стратегия t_i, т. е. выполнено

$$u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \geq u_i(t_i, \mathbf{s}_{-i}),$$

и существует хотя бы один набор стратегий других игроков, $\mathbf{s}'_{-i} \in S_{-i}$, такой что при нем стратегия s_i строго лучше, чем стратегия t_i, т. е.

$$u_i(s_i, \mathbf{s}'_{-i}) > u_i(t_i, \mathbf{s}'_{-i}).$$

Стратегия $s_i \in S_i$ игрока i является его (слабо) **доминирующей стратегией**, если при любых стратегиях, выбранных остальными игроками, $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$, она доминирует любую другую его стратегию, $t_i \in S_i$, либо эквивалентна ей, т. е.

$$u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \geq u_i(t_i, \mathbf{s}_{-i})$$

для всех $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$ и всех $t_i \in S_i$.

В терминах оптимального отклика стратегия $s_i \in S_i$ является доминирующей, если она принадлежит оптимальному отклику при любых стратегиях других игроков:

$$s_i \in R_i(\mathbf{s}_{-i}) \text{ для всех } \mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}.$$

Из определения следует, что если стратегия s_i *строго доминирует* стратегию t_i, то стратегия s_i *доминирует* стратегию t_i. Кроме того, если стратегия является *строго доминирующей*, то она является *доминирующей*.

Исход игры $\mathbf{s}^* \in S$ является **равновесием в доминирующих стратегиях**, если стратегия каждого игрока в этом исходе является его доминирующей стратегией.

Естественно ожидать, что если в игре существуют равновесия в доминирующих стратегиях, то одно из них будет реализовавшимся исходом игры.

> При каких условиях на параметры a, b и c будет существовать равновесие в доминирующих стратегиях в Игре 8 (с. 55)? Каким будет это равновесие? **?**

Следующая игра иллюстрирует равновесие в доминирующих стратегиях.

Игра 21 («Парламентское голосование»): Парламент разделен на 3 фракции: «белые», «зеленые» и «красные». В каждой фракции одинаковое количество членов. Проходит голосование по некоторому законопроекту. Каждая из фракций может проголосовать «за» или «против». Решение принимается большинством голосов. Зеленым и красным нравится законопроект, белым — нет. Если законопроект пройдет, то зеленые и красные получат выигрыш 1, а белые — −1, в противном случае все получат 0. ⊙

Удобно представить исходы игры в виде двух таблиц, (a) и (b) (см. Таблицу 3.4). Белые выбирают между таблицей (a) и таблицей (b). Их выигрыши записаны в левом верхнем углу этих таблиц.

Если зеленые проголосуют «за», то вектор их выигрышей будет

(1 (за, за), 1 (за, против), 1 (против, за), 0 (против, против)).

В скобках указано, как голосуют другие фракции. Если же они проголосуют «против», то вектор выигрышей будет

(1 (за, за), 0 (за, против), 0 (против, за), 0 (против, против)).

Очевидно, что голосовать за законопроект является доминирующей стратегией зеленых. То же самое можно сказать и о красных.

Таблица 3.4. Выигрыши в Игре 21

(a) Белые: *за*

		Красные	
		за	*против*
Зеленые	*за*	−1 1 1	−1 1 1
	против	−1 1 1	0 0 0

(b) Белые: *против*

		Красные	
		за	*против*
Зеленые	*за*	−1 1 1	0 0 0
	против	0 0 0	0 0 0

Белые имеют следующие выигрыши (при аналогичных предположениях о том, как голосуют другие фракции):

за: (−1, −1, −1, 0),
против: (−1, 0, 0, 0).

Видно, что голосовать против законопроекта является доминирующей стратегией белых (хотя, заметим, эта стратегия не сможет им помочь выиграть).

Тем самым, в этой игре существует равновесие в доминирующих стратегиях. В нем зеленые и красные голосуют «за», а белые — «против».

3.5. Последовательное отбрасывание строго доминируемых стратегий

К сожалению, довольно часто бывает, что по крайней мере у одного из игроков нет строго доминирующей стратегии или даже нестрого доминирующей стратегии. Иногда в таких играх исход можно предсказать однозначно, если дополнительно к рациональности предположить, что каждый игрок знает цели партнеров и способен достаточно глубоко «просчитать» их умозаключения.

Игра 22: Телеканалы A и B решают, показывать ли прямую трансляцию важного хоккейного матча. Для того чтобы показать матч, канал A вынужден будет отказаться от показа сериала, а канал B — от показа популярного шоу. Если матч будут транслировать оба канала, то подавляющее число зрителей будут смотреть его на канале A, поскольку комментатор канала A более увлекательно комментирует хоккейные матчи. Сериал канала A не очень популярен, так что показ хоккейного матча выгоднее для этого канала. Шоу канала B соберет значительную зрительскую аудиторию, даже если в это время канал A будет транслировать матч. Выигрыши показаны в Таблице 3.5. ⊙

Таблица 3.5. Данные для Игры 22

		Канал B	
		шоу	*хоккей*
Канал A	*сериал*	3, 7	1, $\underline{9}$
	хоккей	$\underline{9}$, $\underline{4}$	$\underline{8}$, 2

Оптимальные отклики показаны в Таблице 3.5 подчеркиванием. Видно, что каналу A при любом выборе канала B выгоднее показывать хоккейный матч ($9 > 3$ и $8 > 1$). Таким образом, показывать хоккейный матч — это строго доминирующая стратегия канала A. Принимая это во внимание, канал B выберет показ шоу ($4 > 2$). Таким образом, в этой игре должен реализоваться исход (*хоккей*, *шоу*).

В этом и ему подобных случаях нельзя рассматривать мотивацию одного игрока, не рассматривая мотивацию других игроков. Игрок, у которого нет доминирующей стратегии, должен делать какие-то предположения о том, какие стратегии могут выбрать другие игро-

По примеру Игры 22 проанализируйте Игру 8 «Выбор компьютера» (с. 55) при $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$. При каких других параметрах анализ игры даст аналогичные результаты (найдите условия на параметры a, b и c)?

ки. Если игрок считает, что другие игроки рациональны, то в некоторых случаях он может однозначным образом сформировать свои ожидания по поводу их действий. Наиболее очевидное следствие рациональности, которое можно учесть при формировании ожиданий, состоит в следующем:

> *Рациональный игрок не станет выбирать строго доминируемую стратегию.*

Здесь под **строго доминируемой** стратегией подразумевается стратегия, которую строго доминирует какая-либо другая стратегия. Формально, стратегия $t_i \in S_i$ игрока i называется строго доминируемой, если существует стратегия $s_i \in S_i$, такая что

$$u_i(t_i, \mathbf{s}_{-i}) < u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \text{ для всех } \mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}.$$

Пусть структура игры (множества стратегий и функции выигрышей), а также то, что все игроки рациональны, известно каждому игроку. Более того, пусть все это *общеизвестно*, то есть не только каждый игрок знает это, но он знает, что все другие игроки знают это, и так далее до бесконечности. В этом случае игрок должен не только сам исходить из того, что ни один из игроков не выберет строго доминируемую стратегию, но и учитывать, что другие игроки исходят из того, что ни один из игроков не выберет строго доминируемую стратегию. Эту цепочку предположений следует продолжить до бесконечности.

На основе этой идеи строится метод получения решения игры путем **последовательного (итеративного) отбрасывания строго доминируемых стратегий**.

- Если у одного из игроков имеется строго доминируемая стратегия, то ее надо отбросить.
- Следует повторять отбрасывание строго доминируемых стратегий в получающихся «уменьшенных» играх.
- Как только в игре не остается строго доминируемых стратегий, следует остановиться.

Если в результате описанной процедуры получился «остаток», в котором у каждого игрока только одна стратегия, то при сделанных нами предположениях о рациональности представляется естественным, что игроки должны выбрать именно эти не отброшенные стратегии.

Приведем более сложный пример, в котором стратегии отбрасываются за несколько итераций.

Игра 23 (Два бара): На некотором острове конкурируют между собой два бара. Они могут назначать цены 1¤, 2¤ или 3¤ за кружку пива (¤ — это обозначение для местной денежной единицы, буказоида). На острове имеется 6000 туристов, которые выбирают бар случайным образом, поскольку не знают, каковы цены, причем 2/3 из них попадает в Бар 1, поскольку он расположен в более удачном месте, а 1/3 — в Бар 2. Кроме того, есть 6000 местных жителей, которые выбирают бар с наименьшей ценой (если цены одинаковы, то они распределяются поровну между барами). Выигрыш бара — это его выручка[3]. ⊙

Прежде всего рассчитаем выигрыши баров. Если, например, оба бара назначат цену пива в 2¤, то в Бар 1 придут 4000 туристов и 3000 местных жителей, так что его выручка составит

$$2¤ \cdot (4000 + 3000) = 14 \text{ тыс. } ¤,$$

а в Бар 2 придут 2000 туристов и 3000 местных жителей, так что его выручка составит

$$2¤ \cdot (2000 + 3000) = 10 \text{ тыс. } ¤,$$

Если Бар 1 выберет цену 1¤, а Бар 2 — цену 3¤, то в Бар 1 придут 4000 туристов и 6000 местных жителей, так что его выручка составит

$$1¤ \cdot (4000 + 6000) = 10 \text{ тыс. } ¤,$$

а в Бар 2 придут 2000 туристов и 0 местных жителей, так что его выручка составит

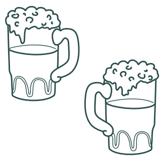
$$3¤ \cdot (2000 + 0) = 6 \text{ тыс. } ¤,$$

Продолжая перебирать разные возможности, мы можем заполнить таблицу выигрышей (см. Таблицу 3.6).

Стратегия 1¤ Бара 1 строго доминируется стратегиями 2¤ и 3¤, т. е. владельце Бара 1 невыгодно назначать такую цену (см. Рис. 3.1). В Таблице 3.7а эта стратегия перечеркнута.

[3]Несложно видоизменить игру и ввести издержки, чтобы выигрышем была прибыль.

Таблица 3.6. Выигрыши для Игры 23 (в тыс. ¤)



		Бар 2		
		1¤	*2¤*	*3¤*
Бар 1	*1¤*	5 7	4 10	6 10
	2¤	8 8	10 14	6 20
	3¤	8 12	16 12	15 21

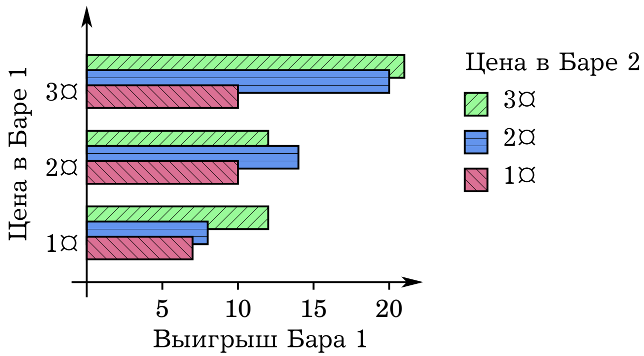


Рис. 3.1. Игра 23 «Два бара». Стратегия 1¤ Бара 1 строго доминируется стратегиями 2¤ и 3¤. Стратегии 2¤ и 3¤ несравнимы

Если владелец Бара 2 знает о том, что владелец Бара 1 не назначит цену 1¤, то он может при сравнении своих стратегий рассматривать только выигрыши, соответствующие стратегиям 2¤ и 3¤ Бара 1. Таким образом, от может в своих рассуждениях ограничится игрой, изображенной в Таблице 3.7b. В этой игре его стратегии 1¤ и 3¤ строго доминируются стратегией 2¤. Значит, ему выгодна только цена 2¤.

Далее, владельцу Бара 1 достаточно рассмотреть игру, изображенную в Таблице 3.7c. В этой игре стратегия 2¤ доминирует для него стратегию 3¤. Это означает, что решение игры находится однозначно — это должен быть набор стратегий (2¤, 2¤).

Таблица 3.7. Отбрасывание строго доминируемых стратегий в Игре 23

(a)

Бар 1 \ Бар 2	1¤	2¤	3¤
1¤	7, 5	10, 4	10, 6
2¤	8, 8	14, 10	20, 6
3¤	12, 8	12, 16	21, 15

(b)

Бар 1 \ Бар 2	1¤	2¤	3¤
2¤	8, 8	14, 10	20, 6
3¤	12, 8	12, 16	21, 15

(c)

Бар 1 \ Бар 2	2¤
2¤	14, 10
3¤	12, 16

Какие исходы в Игре 23 являются Парето-оптимальными? **?**

Если в результате процедуры последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий у каждого игрока останется единственная стратегия (как в рассмотренной только что Игре 23), то, как и в случае существования строго доминирующих стратегий у каждого игрока, исход игры может быть предсказан однозначно. Даже если рассматриваемая процедура даст неоднозначный результат, то, по крайней мере, можно быть уверенным, что решение должно принадлежать полученному остатку.

Следует понимать, что в основе рассматриваемого решения лежит не только предположение об общеизвестности структуры игры и рациональности игроков, но и о способности игроков провести соответствующие рассуждения, ведь цепочка рассуждений может быть довольно длинной (я знаю, что он знает, что я знаю. . .). Для сложной игры может понадобиться достаточно высокий уровень интеллекта.

Заметим, что остаток при последовательном отбрасывании *строго* доминируемых стратегий всегда один и тот же, вне зависимости от того, в каком порядке происходит отбрасывание стратегий. Можно рассмотреть также процедуру последовательного отбрасывания (слабо) доминируемых стратегий (правда она кажется менее обоснованной с точки зрения рациональности). В этой последней процедуре порядок уже существен.

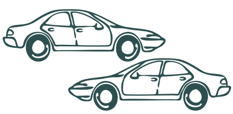
Ситуации, когда в игре существует равновесие в доминирующих стратегиях, достаточно редки. И далеко не во всех играх можно найти решение, отбрасывая строго доминируемые стратегии. Естественно предположить, что при отсутствии у всех игроков доминирующих стратегий, выбор каждого игрока зависит от *ожиданий* того, какие стратегии выберут другие. Далее мы рассмотрим концепцию решения, основанную на этой идее.

3.6. Равновесие Нэша

Существуют игры, в которых ни у одного из игроков нет доминируемой стратегии либо остаток от отбрасывания доминируемых стратегий слишком большой, что не позволяет сделать точное предсказание исхода игры с использованием доминирования. Например, в Игре 18 у обоих игроков по две стратегии, и эти стратегии не сравнимы между собой. Приведем еще один пример подобной игры.

Игра 24 (Chicken): Два хулигана с машинами придумали следующее развлечение. Они едут на полной скорости навстречу друг другу посередине пустынной дороги. Когда машины сблизятся, каждый может либо свернуть, либо продолжать ехать прямо. Если оба свернули, то будет ничья. Если только один свернул, то он объявляется «слабаком». Если оба не свернут, то произойдет столкновение с тяжелыми последствиями. Выигрыши показаны в Таблице 3.8 ⊙

Таблица 3.8. Выигрыши в Игре 24



		Игрок 2: *прямо*	Игрок 2: *свернуть*
Игрок 1	*прямо*	−1000 −1000	$\underline{-1}$ $\underline{1}$
Игрок 1	*свернуть*	$\underline{1}$ $\underline{-1}$	0 0

Очевидно, что в Игре 24 ни у одного из двух игроков нет доминирующих стратегий.

Можно сделать вывод, что идея доминирования не дает универсальной и достаточно точной концепции решения для некооперативных игр. Более универсальную концепцию решения предложил

Джон Нэш. Идея Нэша состоит в том, что профиль стратегий, соответствующий решению, должен быть в определенном смысле *стабильным* или, как еще говорят, *равновесным*.

Можно принять за основу решения следующие предположения:

- игроки при принятии решений ориентируются на предполагаемые действия других игроков;
- ожидания являются равновесными (совпадают с фактически выбранными другими игроками действиями).

Если считать, что все игроки рациональны, так что каждый выбирает стратегию, дающую ему наибольший выигрыш при данных ожиданиях, то эти предположения приводят к концепции решения, называемой **равновесием Нэша**. В равновесии у каждого игрока нет оснований пересматривать свои ожидания. Запишем определение равновесия Нэша формулами.

> Профиль стратегий $\mathbf{s}^* \in S$ и ожидания $\mathbf{s}^e_{-i}$, $i = 1,\ldots,n$, составляют равновесие Нэша, если
>
> - стратегия s_i^* каждого игрока $i = 1,\ldots,n$ является наилучшим для него откликом на ожидаемые им стратегии других игроков $\mathbf{s}^e_{-i}$:
>
> $$u_i(s_i^*, \mathbf{s}^e_{-i}) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, \mathbf{s}^e_{-i});$$
>
> - ожидания совпадают с фактически выбираемыми стратегиями:
>
> $$\mathbf{s}^e_{-i} = \mathbf{s}^*_{-i},\ i = 1,\ldots,n.$$

Заметим, что при использовании равновесия Нэша для моделирования игровых ситуаций вопросы о том, знают ли игроки цели партнеров, знают ли они о рациональности партнеров, умеют ли их просчитывать и т. д., отходят на второй план. Способ формирования ожиданий выносится за рамки анализа; здесь важно только то, что ожидания по каким-то причинам оправдываются.

Очевидно, что из данного выше определения равновесия можно исключить ожидания, поскольку они совпадают со стратегиями. Поэтому обычно используют следующее более простое определение.

> Профиль стратегий является равновесием Нэша, если стратегия каждого игрока является наилучшим для него откликом на стратегии других игроков.

Формально профиль стратегий $\mathbf{s}^* \in S$ — это равновесие Нэша, если для всех игроков $i = 1,\ldots,n$ выполнено

$$u_i(s_i^*, \mathbf{s}^*_{-i}) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, \mathbf{s}^*_{-i}).$$

В терминах введенных ранее функций (отображений) отклика это можно записать более компактно:

$$s_i^* \in R_i(\mathbf{s}_{-i}^*).$$

Если отклик каждого игрока однозначен (является *функцией*), то множество равновесий Нэша совпадает с множеством решений системы уравнений

$$s_i^* = R_i(\mathbf{s}_{-i}^*),\ i = 1, \ldots, n.$$

Продемонстрируем сначала поиск равновесия Нэша на примере матричной игры.

Игра 25 («Домашний ремонт»): Супруги решили сделать в своей квартире ремонт. Каждый из них может посвятить ремонту 1, 2 или 3 дня. Жена считает, что оптимальный ремонт можно сделать, затратив 4 человеко-дня. Мужа волнует только, чтобы бремя ремонта легло на них как можно более равномерно. Соответственно, полезность мужа имеет вид $u_2 = -|x - y|$, где x — работа жены, y — его работа. Полезность жены имеет вид $u_1 = 8z - z^2$, где $z = x + y$. Рассчитанные выигрыши даны в Таблице 3.9. ⊙

Таблица 3.9. Выигрыши для Игры 25

		Муж		
		1	*2*	*3*
Жена	*1*	12, $\underline{0}$	15, −1	$\underline{16}$, −2
	2	15, −1	$\underline{16}$, $\underline{0}$	15, −1
	3	$\underline{16}$, −2	15, −1	12, $\underline{0}$

В Таблице 3.9 отображения отклика игроков выделены подчеркиванием выигрышей, соответствующих оптимальным действиям. Равновесие Нэша в данной игре — это исход (*2*, *2*), поскольку выигрыши обоих игроков в соответствующей клетке подчеркнуты. Других равновесий в этой игре нет.

Сформулируем еще раз определение равновесия Нэша, но несколько другими словами. В равновесии каждый из игроков использует некоторую стратегию. Если данный профиль стратегий является равновесием Нэша, то *ни один из игроков не сможет полу-*

> При каких условиях на параметры в Игре 8 (с. 55) будет равновесием Нэша исход, когда оба выбирают IBM? Когда это равновесие единственно? Может ли оно являться также равновесием в доминирующих стратегиях?
>
> **?**

чить выгоду, отклонившись от своей стратегии, при том, что другие игроки не меняют свои стратегии.

Эту переформулировку определения равновесия на примере Игры 25 иллюстрирует Таблица 3.10. Стрелками изображены варианты изменения стратегии одного игрока, приводящие к росту его выигрыша при неизменной стратегии другого игрока. Равновесию Нэша соответствуют такие клетки матрицы, из которых не выходят стрелки, а только входят. Еще раз убеждаемся, что профиль стратегий (*2*, *2*) соответствует равновесию.

Таблица 3.10. Иллюстрация равновесия Нэша в Игре 25

		Муж *1*	Муж *2*	Муж *3*
Жена	*1*	0 12	−1 15	−2 16
Жена	*2*	−1 15	0 16	−1 15
Жена	*3*	−2 16	−1 15	0 12

Здесь мы проиллюстрировали еще один метод поиска равновесия Нэша. Если для данного профиля стратегий найдется игрок, которому выгодно поменять свою стратегию, то такой профиль стратегий не является равновесным. При этом вовсе не обязательно искать *оптимальный* отклик игрока, достаточно просто указать стратегию, которая дает этому игроку *более высокий* выигрыш при данных стратегиях других игроков. Таким образом, можно искать равновесия Нэша перебором по всем возможным профилям стратегий. В некоторых играх можно выделить большие классы похожих профилей стратегий, которые не могут являться равновесными, и уменьшить трудоемкость такого перебора.

Как и рассмотренные ранее концепции решения, концепция равновесия Нэша может использоваться для предсказания исхода игры.

Без преувеличения можно сказать, что равновесие Нэша — это самый мощный и широко используемый инструмент теории некооперативных игр. Привлекательность равновесия Нэша основывается том, что это довольно простая и универсальная концепция решения.

В равновесии Нэша ожидания игроков по поводу стратегий, выбранных другими игроками, сбываются. Требуется только как-то обосновать, почему это может происходить. Концепция равновесия Нэша обосновывалась многими различными способами, главным образом неформально. Мы кратко обсудим некоторых из этих обоснований.

- *Самоподдерживающиеся соглашения.* Пусть игроки до игры обсуждают, как они должны играть в данную игру. По определению в некооперативных играх обязательные для выполнения соглашения между игроками невозможны. Очевидно, что в таких условиях соглашение между игроками должно быть «самоподдерживающимся» в том смысле, что ни у одного из игроков не должно быть причин не выполнить свои обязательства, если он верит, что другой игрок выполнит свои обязательства. Равновесие Нэша — это решение, которое соответствует подобному самоподдерживающемуся соглашению. Как только соглашение достигнуто, ни одному индивидууму не имеет смысла в одностороннем порядке отклоняться от него. (Один из недостатков этого обоснования состоит в том, что могут существовать равновесия Нэша, которые доминируются по Парето другими равновесиями Нэша. Такие равновесия вряд ли могут быть достигнуты за счет соглашения между игроками.)

- *Принятое в обществе поведение — эволюционное обоснование.* Представьте себе стратегическое взаимодействие между несколькими игроками, такое что игрок 1 выбран наугад из некоторой группы индивидуумов, игрок 2 выбран наугад из некоторой другой группы индивидуумов, и т. д. «Игрок i» — это роль, в которой выступают разные индивидуумы. Можно считать, что эта ситуация время от времени повторяется, в каждом повторении участники выбираются случайным образом и примеряют на себя доставшуюся им роль. Если этот процесс придет к некоторому стабильному профилю стратегий, который раз за разом повторяется, то этот профиль стратегий можно рассматривать как принятое в обществе поведение.

  Важно, что игроки помнят, к каким результатам приводили действия предыдущих игроков в прошлом, что они стараются выбирать по возможности наилучшие действия и что они экспериментируют с некоторой небольшой вероятностью. В этом случае любое принятое в обществе поведение должно соответствовать равновесию Нэша. Если бы результатом был профиль стратегий, который не является равновесием Нэша, то это означало бы, что по крайней мере один из игроков выбирает свою стратегию не лучшим образом в ответ на стратегию другого игрока, и рано или поздно игрок в этой роли методом проб и ошибок подберет более удачную стратегию, которая и будет использоваться игроками в той же роли в дальнейшем. Другими словами, исход, который не соответствует равновесию Нэша, в некотором смысле нестабилен и он вряд ли может быть результатом общепринятого поведения.

- *Результат обучения в повторяющейся игре.* Пусть игроки участвуют в одной и той же игре неоднократно. Игра повторяется много раз, и игроки набирают опыт по ходу игры. Каждый игрок просто пытается научиться играть в эту игру и действовать наилучшим для себя образом, учитывая предыдущую историю игры. Можно представить себе, что со временем их игра может прийти к некоторому определенному стабильному профилю стратегий. Если такое случится, то этот профиль стратегий должен составлять равновесие Нэша. (Есть, однако, две проблемы с этой интерпретацией. Во-первых, игра может никогда не стабилизироваться. Во-вторых, повторяющаяся игра — это не то же самое, что исходная игра, на основе которой она строится.)

Приведенные неформальные обоснования наталкивают на мысль, что если есть некоторый профиль стратегий для игры в нормальной форме, который можно принять в качестве решения, то, по-видимому, он и должен быть равновесием Нэша. Другими словами, есть основания утверждать, что необходимое условие для разумного решения игры состоит в том, что оно должно являться равновесием Нэша. Заметим, однако, из этого вовсе не следует обратное утверждение, что любое равновесие Нэша является разумным решением игры. Некоторые равновесия Нэша (и это мы в дальнейшем увидим) являются довольно спорными решениями.

Преимущество использования концепции равновесия Нэша состоит в том, что можно найти решение и в тех играх, в которых отбрасывание строго доминируемых стратегий не позволяет этого сделать. Однако сама концепция для анализа некоторых игровых ситуаций

Укажите равновесия Нэша в Игре 24. Подходит ли к этим равновесиям какое-либо из приведенных выше обоснований равновесия Нэша?

?

может показаться менее адекватной.

Связь между введенными концепциями решений описывается следующими утверждениями.

Если профиль стратегий является равновесием Нэша, то ни одна из составляющих его стратегий не может быть отброшена в результате применения процедуры последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий.

Если в результате последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий у каждого игрока остается единственная стратегия, то соответствующий профиль стратегий является равновесием Нэша.

На примере Игры 22 и Игры 23 убедитесь в справедливости утверждений о связи равновесия Нэша и остатка от последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий.

?

Нам важно здесь, что концепция Нэша не входит в противоречие с идеями рациональности, заложенной в процедуре отбрасывания строго доминируемых стратегий.

Отметим, что данный результат относится только к строгому доминированию. Можно привести пример равновесия Нэша с одной или несколькими слабо доминируемыми стратегиями.

Другой (очевидный) факт состоит в том, что равновесие в доминирующих стратегиях всегда является равновесием Нэша.

Объясните, почему равновесие в доминирующих стратегиях должно быть также равновесием Нэша.

?

Однако, если есть равновесие в доминирующих стратегиях, то могут быть и другие равновесия Нэша.

Приведем пример игры, в которой у каждого из игроков имеется много стратегий.

> В Игре 21 найдите все равновесия Нэша и убедитесь, что таких равновесия несколько и только одно из них является равновесием в доминирующих стратегиях. **?**

Игра 26 («Дискретный аукцион первой цены»): Продается некий предмет. Имеется n участников, каждый из которых называет цену. В **аукционе первой цены**, предмет достается участнику, назвавшему наивысшую цену, и он платит ту цену, которую назвал. При равенстве цен победителя определяет жребий. Если обозначить через v_i ценность данного предмета для i-го участника, а через p_i цену, которую от уплатил за предмет, то его выигрыш составит $v_i - p_i$. Если игрок не победит в аукционе и не получит предмет, то его выигрыш будет равен нулю. Аукцион дискретный в том смысле, что как оценки v_i, так и называемые цены p_i могут быть только целочисленными $(0,1,2,\ldots)$[4]. ⊙

Рассмотрим мотивацию i-го игрока. Обозначим через $p_{\max}$ максимальную из цен, которые назвали остальные игроки, а через k количество остальных игроков, которые назвали $p_{\max}$. Функция выигрыша i-го игрока имеет вид

$$u_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \begin{cases} v_i - p_i, & \text{если } p_i > p_{\max}, \\ (v_i - p_i)/(k+1), & \text{если } p_i = p_{\max}, \\ 0, & \text{если } p_i < p_{\max}. \end{cases}$$

Здесь при $p_i = p_{\max}$ выигрыш рассчитывается как математическое ожидание. С вероятностью $1/(k+1)$ игроку достанется предмет, а с вероятностью $k/(k+1)$ — нет. Поэтому его ожидаемый выигрыш составит

$$\frac{1}{k+1} \cdot (v_i - p_i) + \frac{k}{k+1} \cdot 0 = \frac{v_i - p_i}{k+1}.$$

При $p_{\max} > v_i$ i-му игроку не выгодно побеждать на аукционе, т. е. выгодно выбрать $p_i < p_{\max}$. При $p_{\max} = v_i$ выгодно выбрать любую цену, не превышающую $p_{\max}$. При $p_{\max} < v_i$ следует выбирать между $p_i = p_{\max}$ и $p_i = p_{\max} + 1$, сравнивая выигрыши $(v_i - p_{\max})/(k+1)$ и $v_i -$

[4]Заметим, что в непрерывном случае равновесия для аукциона первой цены не существует.

$p_{\max}-1$. Отображение отклика имеет следующий вид:

$$R_i(\mathbf{p}_{-i})=\begin{cases}\{0,\ldots,p_{\max}-1\}, & \text{если } p_{\max}>v_i,\\ \{0,\ldots,p_{\max}\}, & \text{если } p_{\max}=v_i,\\ p_{\max}, & \text{если } v_i-(k+1)/k<p_{\max}<v_i,\\ \{p_{\max},p_{\max}+1\}, & \text{если } p_{\max}=v_i-(k+1)/k,\\ p_{\max}+1, & \text{если } p_{\max}<v_i-(k+1)/k.\end{cases}$$

В общем случае найти все равновесия Нэша в этой игре затруднительно. Рассмотрим только пример двух игроков с оценками $v_1=4$ и $v_2=8$. Будем предполагать, что называемые цены не могут превышать 10. Отображения отклика двух игроков приобретают следующий вид:

$$R_1(p_2)=\begin{cases}\{0,\ldots,p_2-1\}, & \text{если } p_2=5,\ldots,10,\\ \{0,\ldots,4\}, & \text{если } p_2=4,\\ 3, & \text{если } p_2=3,\\ \{2,3\}, & \text{если } p_2=2,\\ p_2+1, & \text{если } p_2=0,1.\end{cases}$$

и

$$R_2(p_1)=\begin{cases}\{0,\ldots,p_1-1\}, & \text{если } p_1=9,10,\\ \{0,\ldots,8\}, & \text{если } p_1=8,\\ 7, & \text{если } p_1=7,\\ \{6,7\}, & \text{если } p_1=6,\\ p_1+1, & \text{если } p_1=0,\ldots,5.\end{cases}$$

На Рис. 3.2 оптимальный отклик первого участника показан крестиками, а второго — кружка́ми. Видно, что в игре имеется четыре равновесия Нэша (в них крестики накладываются на кружки́).

Во всех равновесиях второй игрок называет на 1 более высокую цену, чем первый, и побеждает на аукционе. Для второго игрока выгодно равновесие с самой низкой ценой — $p_2=4$. Для первого же все равновесия эквивалентны.

Проиллюстрируем теперь использование функций отклика на примере игры, в которой игроки имеют непрерывные стратегии.

Игра 27 («Международная торговля»): Две страны одновременно выбирают уровень таможенных пошлин τ_i. Объем торговли между странами[5] x зависит от установленных пошлин как

$$x=1-\tau_1-\tau_2.$$

[5]В этой игре мы для упрощения не делаем различия между экспортом и импортом.

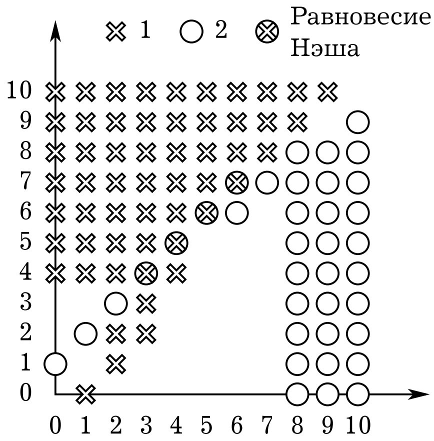


Рис. 3.2. Дискретный аукцион первой цены,

По примеру Игры 26 проанализируйте дискретный аукцион второй цены, то есть такой аукцион, в котором предмет достается участнику, назвавшему наивысшую цену, но платит он предыдущую по величине цену. Убедитесь, что в аукционе второй цены у каждого игрока есть доминирующая стратегия.

?

Цель каждой страны — максимизировать доходы

$$u_i = \tau_i x. \qquad \odot$$

Максимизируем выигрыш первой страны

$$\tau_1(1 - \tau_1 - \tau_2),$$

по τ_1, считая фиксированным уровень пошлины, установленный второй страной. Условие первого порядка имеет вид

$$1 - 2\tau_1 - \tau_2 = 0.$$

(Это условие соответствует максимуму, а не минимуму, в чем нетрудно убедиться, рассмотрев форму целевой функции.)

Условие первого порядка для задачи максимизации выигрыша второй страны находится аналогично:

$$1 - \tau_1 - 2\tau_2 = 0.$$

Решив систему из двух линейных уравнений, найдем равновесие Нэша:

$$\tau_1^* = \tau_2^* = 1/3.$$

Оптимальный отклик первой страны на уровень таможенной пошлины, установленной второй страной, описывается функцией

$$\tau_1(\tau_2) = \frac{1-\tau_2}{2}.$$

Аналогично отклик второй страны имеет вид

$$\tau_2(\tau_1) = \frac{1-\tau_1}{2}.$$

Чтобы найти равновесие Нэша, требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} \tau_1(\tau_2^*) = \tau_1^*, \\ \tau_2(\tau_1^*) = \tau_2^*. \end{cases}$$

Графически поиск равновесия Нэша показан не Рис. 3.3. Точки, лежащие на кривых оптимального отклика $\tau_1(\tau_2)$ и $\tau_2(\tau_1)$, характеризуются тем, что в них касательные к кривым безразличия игроков параллельны соответствующей оси координат. Напомним, что кривой безразличия называют множество точек, в которых полезность рассматриваемого индивидуума одна и та же ($u_i(\mathbf{s}) = \mathrm{const}$). Равновесие находится как точка пересечения кривых отклика.

Рассмотрим теперь пример игры с непрерывными стратегиями, в которой решение нельзя найти простым дифференцированием.

Игра 28 («Мороженщики на пляже»): Два мороженщика в жаркий день продают на пляже мороженое. Пляж можно представить как единичный отрезок. Мороженщики выбирают, в каком месте пляжа им находиться, т. е. выбирают координату $x_i \in [0,1]$. Покупатели равномерно рассредоточены по пляжу и покупают мороженое у ближайшего к ним продавца. Если $x_1 < x_2$, то первый обслуживают $(x_1 + x_2)/2$ долю пляжа, а второй — $1-(x_1+x_2)/2$. Если мороженщики расположатся в одной и той же точке ($x_1 = x_2$), покупатели поровну распределятся между ними. Каждый мороженщик стремиться обслуживать как можно бо́льшую долю пляжа (цену мороженого они менять не могут). ⊙

Эта игра моделирует неценовую конкуренцию, когда продавцы выбирают местоположение, но не цены. Выигрыш игрока i (через

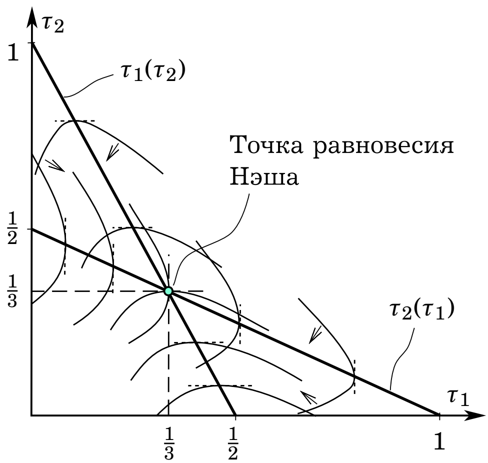


Рис. 3.3. Равновесие Нэша в игре «Международная торговля»

j обозначаем другого игрока) равен:

$$u_i(x_i, x_j) = \begin{cases} (x_i + x_j)/2, & \text{если } x_i < x_j, \\ 1/2, & \text{если } x_i = x_j, \\ 1 - (x_i + x_j)/2, & \text{если } x_i > x_j. \end{cases}$$

Графики выигрыша первого игрока для трех возможных ситуаций показаны на Рис. 3.4. Как очевидно из графиков, если $x_2 \neq 1/2$, то у задачи максимизации u_1 по x_1 нет решения. если же $x_2 = 1/2$, то максимум u_1 достигается при $x_1 = 1/2$.

Таким образом, оптимальный отклик первого игрока имеет вид

$$R_1(x_2) = \begin{cases} 1/2, & x_2 = 1/2, \\ \varnothing, & x_2 \neq 1/2. \end{cases}$$

У второго игрока такой же отклик с точностью до замены индексов. Видим, что единственное равновесие — точка $(1/2, 1/2)$, т. е. оба мороженщика должны расположиться посередине пляжа.

3.6.1. Множественность равновесий Нэша и фокальные точки

Фокальные точки — это равновесия, которые чем-то выделяются на фоне других равновесий, какими-то особенностями, которые не

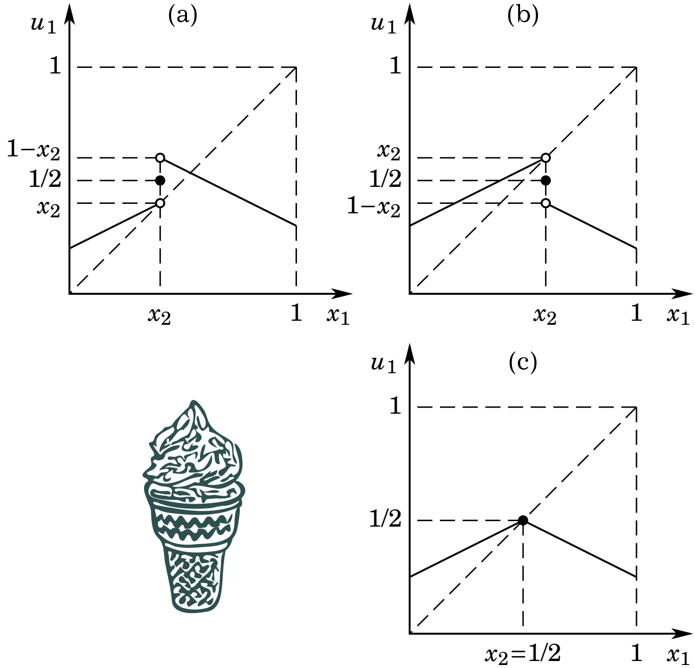


Рис. 3.4. Графики выигрыша первого игрока в Игре 28: (a) $x_2 < 1/2$, (b) $x_2 > 1/2$, (c) $x_2 = 1/2$

Рассмотрите для Игры 28 различные варианты расположения мороженщиков на пляже и проверьте, что все они, кроме $(1/2, 1/2)$, не являются равновесными, указав возможные способы увеличения выигрыша.

?

включены в формальную модель игры. Такие особенности могут, например, иметь психологическую или социальную основу. Они могут даже основываться на совершенно банальных вещах, например, на названиях действий или их порядковом номере. Фокальные точки могут также возникать из-за того, что один из исходов доминирует другие исходы по Парето.

Игра 29 («Встреча в Нью-Йорке»): Два игрока находятся в разных местах Нью-Йорка, и не могут друг с другом связаться. Они назначили встречу на полдень, но забыли договориться о конкретном месте. Каждый должен решить, куда именно он пойдет. Если они встретятся, то получат удовольствие от совместного обеда, в противном случае каждый будет обедать в одиночестве. Выигрыш от совместного обеда — по 1 у каждого. Выигрыш от обеда в одиночестве — 0 у каждого. Имеется два варианта места встречи — у часов на центральном железнодорожном вокзале Grand Cental и на крыше небоскреба Empire State Building. ⊙

В этом примере интересы игроков полностью совпадают. Нет конфликта. Это в чистом виде проблема координации. Но, как и в конфликтной ситуации, здесь оптимальные действия каждого из игроков зависят от того, что, по его предположению, выберет другой. Таким образом, эта бесконфликтная игра тоже содержит стратегический аспект.

Таблица 3.11. Игра 29 «Встреча в Нью-Йорке» в виде матрицы

		Игрок 2	
		GC	*ES*
Игрок 1	*GC*	$\underline{1}$, $\underline{1}$	0, 0
	ES	0, 0	$\underline{1}$, $\underline{1}$

Здесь имеется два возможных равновесия Нэша. (См. Таблицу 3.11.) Этот пример подчеркивает, что концепция равновесия Нэша существенным образом опирается на то, что ожидания сбываются. Сама по себе концепция равновесия Нэша ничего не говорит о том, какое из равновесий должно реализоваться, если их много. В то же время, предполагается, что игроки верно предсказывают, какое это будет равновесие.

Как такое может быть? В данном примере может быть так, что равновесие определяется культурными особенностями. Так, приезжие скорее всего встретятся на крыше Эмпайр-стейт-билдинг, поскольку это это известный туристский объект. Коренные же жители Нью-Йорка скорее предпочтут центральный вокзал.

С другой стороны, может оказаться так, что в районе центрального вокзала расположены более хорошие рестораны. Можно предположить, что исход (GC, GC) дает более высокие выигрыши (2;2). Тогда он доминирует по Парето исход (ES, ES), так что этот выбор будет для обоих естественным.

Подобные исходы, которые особо выделяются по каким-то внешним характеристикам и могут быть выбраны в качестве конкретного равновесия, и были названы Томасом Шеллингом [16] фокальными точками.

Можно ли одно из равновесий в Игре 18 «Координирование инвестиций» назвать фокальной точкой? **?**

Можно ли одно из равновесий в Игре 24 «Chicken» назвать фокальной точкой? **?**

3.7. Оптимальный отклик в смешанных стратегиях. Равновесие Нэша в смешанных стратегиях

Нетрудно построить примеры игр, в которых равновесие Нэша отсутствует. Следующая игра является подобным примером.

Игра 30 («Инспекция»): Первый игрок (проверяемый) поставлен перед выбором — платить или не платить подоходный налог. Второй — налоговой инспектор, решает, проверять или не проверять именно этого налогоплательщика. Если инспектор «ловит» недобросовестного налогоплательщика, то взимает в него штраф и получает поощрение по службе, более чем компенсирующее его издержки; в случае же проверки исправного налогоплательщика, инспектор, не получая поощрения, тем не менее несет издержки, связанные с проверкой. Матрица выигрышей представлена в Таблице 3.12. ⊙

Таблица 3.12. Данные для Игры 30

		Инспектор	
		проверять	*не проверять*
Проверяемый	*нарушать*	-1; $\underline{1}$	$\underline{1}$; 0
	не нарушать	$\underline{0}$; -1	0; $\underline{0}$

Если инспектор уверен, что налогоплательщик выберет не платить налог, то инспектору выгодно его проверить. С другой стороны, если налогоплательщик уверен, что его проверят, то ему лучше заплатить налог. Аналогичным образом, если инспектор уверен, что налогоплательщик заплатит налог, то инспектору не выгодно его проверять, а если налогоплательщик уверен, что инспектор не станет его проверять, то он предпочтет не платить налог. Оптимальные отклики показаны в таблице подчеркиванием соответствующих выигрышей. Очевидно, что ни одна из клеток не может соответствовать равновесию Нэша, поскольку ни в одной из клеток не подчеркнуты одновременно оба выигрыша. Этот факт также можно подтвердить анализом стрелок, которые в данном случае «идут по кругу и нигде не останавливаются».

В подобной игре каждый игрок заинтересован в том, чтобы другой игрок не смог угадать, какую именно стратегию он выбрал. Этого можно достигнуть, внеся в выбор стратегии элемент неопределенности, попеременно используя то одну, то другую стратегию.

Те стратегии, которые мы рассматривали раньше, принято называть **чистыми стратегиями**. Как мы уже говорили ранее, стратегия — это полный план действий игрока. Можно обобщить это понятие, предусмотрев выбор игроком своих чистых стратегий с некоторыми наперед заданными вероятностями. Такие стратегии получили название **смешанных стратегий**.

> Смешанной стратегией игрока называется распределение вероятностей на его множестве чистых стратегий.

Мы рассмотрим только простой случай, когда множество чистых стратегий каждого игрока конечно[6]. Пусть у игрока i имеется m чистых стратегий: $s_i^1, \ldots, s_i^m$. Этим стратегиям игрок может приписать вероятности $p_i^1, \ldots, p_i^m$, где $p_i^k \in [0;1]$ — вероятность, с которой игрок

[6] Соответствующая игра называется **конечной**.

выбирает свою стратегию s_i^k. Сумма таких вероятностей должна быть равна единице. Соответствующий вектор вероятностей и будет смешанной стратегией игрока:

$$\boldsymbol{\sigma}_i = (p_i^1, \ldots, p_i^m).$$

Используя смешанную стратегию, игрок **рандомизирует** — выбирает одну из своих чистых стратегий случайно, в соответствии с некоторым распределением вероятностей. Пусть, например, у игрока есть стратегии A и B. Его смешанная стратегия может, например, состоять в том, чтобы выбирать стратегию A с вероятностью 75% и B с вероятностью 25%. Как он может это сделать? Один из способов — бросать монету два раза. Если оба раза выпадет орел, то выбрать B, а если хотя бы один раз выпадет решка, то A.

Заметим, что согласно приведенному определению, распределение вероятностей, приписывающее вероятность единица единственной смешанной стратегии, тоже следует называть смешанной стратегией. Такую смешанную стратегию можно называть чистой. Чтобы выделить в явном виде смешанные стратегии, не совпадающие с чистыми, следует дать несколько иное определение. Смешанная стратегия игрока называется **вполне смешанной**, если вероятности положительны для каждой чистой стратегии этого игрока.

Многие игры характеризуются тем, что если бы другие игроки узнали точно, какой именно чистой стратегией хочет воспользоваться данный игрок, то они могли бы это использовать в своих интересах. Яркий пример — это футбольный пенальти. Игрок, бьющий пенальти старается, чтобы вратарь не догадался, куда он будет бить. Вратарь же готовится к прыжку в ту или другую сторону. Другой характерный пример — это поведение игроков в покере. Игрок в покере вынужден время от времени блефовать, т. е. играть со слабыми картами так же, как с сильными (и наоборот, вынужден время от времени играть с сильными картами так же, как со слабыми). Если этого не делать, то противник может получить преимущество. Но рандомизация используется и во многих других жизненных ситуациях. Это и ведение войны, когда надо, чтобы противник не угадал твой выбор. Это и многие экономические явления, например, установление то высокой цены, то низкой цены (несезонных скидок).

Конечно, люди редко делают выбор с помощью монеты. Однако, есть многие другие способы вести себя непредсказуемо, чтобы другие игроки не смогли угадать, что именно ты выбрал. Выбор стратегии может определяться некоторым подходящим *сигналом*, который сам игрок может наблюдать, а другие игроки — нет[7]. Например, игрок может выбирать стратегию в зависимости от своего настроения, если ему известно распределение вероятностей его настроений, или от того, с какой ноги он в этот день встал.

Как мы уже отмечали, стандартное предположение теории игр состоит в том, что если выигрыш — случайная величина, то игроки предпочитают действия, которые приносят им *наибольший ожидаемый выигрыш*. Ожидаемый выигрыш игрока зависит от того, какую смешанную стратегию выберет он сам и от того, какие стратегии выбрали все остальные игроки.

Таблица 3.13. Вероятности исходов при использовании смешанных стратегий в Игре 30

	Проверять	*Не проверять*
Нарушать	pq	$p(1-q)$
Не нарушать	$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Рассмотрим вычисление ожидаемого выигрыша на примере Игры 30. Обозначим через p вероятность того, что налогоплательщик не платит подоходный налог, а через q — вероятность того, что налоговой инспектор проверяет налогоплательщика. Если оба игрока выбирают действия независимо друг от друга, то вероятность исхода равна произведению вероятностей, с которыми выбираются соответствующие чистые стратегии. Вероятности четырех возможных исходов указаны в Таблице 3.13. Учитывая это, ожидаемый выигрыш налогоплательщика равен

$$U_1(p,q) = pq\cdot(-1) + p(1-q)\cdot 1 + (1-p)q\cdot 0 + (1-p)(1-q)\cdot 0 = \\ = p(1-2q),$$

а ожидаемый выигрыш инспектора равен

$$U_2(p,q) = pq\cdot 1 + p(1-q)\cdot 0 + (1-p)q\cdot(-1) + (1-p)(1-q)\cdot 0 = \\ = q(2p-1).$$

С учетом того, что игроки могут рандомизировать, следует внести изменения в определение оптимального отклика. **Наилучшим (оптимальным) откликом** игрока на смешанные стратегии, выбранные дру-

[7]Если сигналы, наблюдаемые игроками, статистически зависимы, то это может помочь игрокам скоординировать свои действия. Это приводит к концепции так называемого *коррелированного равновесия*.

гими игроками будет смешанная стратегия, которая приносит ему наибольший ожидаемый выигрыш.

Найдем оптимальные отклики в Игре 30. Как мы уже видели, ожидаемый выигрыш налогоплательщика равен $U_1(p,q) = p(1-2q)$, а ожидаемый выигрыш инспектора равен $q(2p-1)$. Оптимальный отклик налогоплательщика находится из решения задачи

$$\text{максимизировать } p(1-2q) \text{ по } p \in [0;1].$$

Соответственно, оптимальный отклик инспектора находится из решения задачи

$$\text{максимизировать } q(2p-1) \text{ по } q \in [0;1].$$

Вообще говоря, для нахождения оптимального отклика не требуется вычислять полностью ожидаемые выигрыши. Достаточно только вычислить ожидаемые выигрыши от чистых стратегий игрока, а затем сравнить их. Дело в том, что, поскольку игрок максимизирует ожидаемый выигрыш, который линеен по вероятностям, то *он будет смешивать несколько разных чистых стратегий, только если они дают ему одинаковый выигрыш (при данных стратегиях других игроков)*. Если же некоторая чистая стратегия дает меньший ожидаемый выигрыш, чем другая чистая стратегия, то для игрока лучше всего выбирать ее с нулевой вероятностью. Эти свойства существенно облегчают поиск оптимального отклика.

Найдем ожидаемые выигрыши налогоплательщика от двух его возможных действий:

$$\begin{array}{ll} \text{нарушать:} & q\cdot 0 + (1-q)\cdot 0 = 0, \\ \text{не нарушать:} & q\cdot(-1) + (1-q)\cdot 1 = 1-2q. \end{array}$$

Если вероятность проверки мала ($q < 1/2$), то $1-2q > 0$ и налогоплательщику выгодно не платить налог, т. е. выбрать $p = 1$. Если вероятность проверки велика, то налогоплательщику выгодно заплатить налог, т. е. выбрать $p = 0$. Если же $q = 1/2$, то налогоплательщику все равно, платить налог или нет ($1-2q = 0$), и он может выбрать любую вероятность p из интервала $[0,1]$. Таким образом, отображение отклика налогоплательщика имеет вид:

$$p(q) = \begin{cases} 1, & \text{если } q < 1/2, \\ [0,1], & \text{если } q = 1/2, \\ 0, & \text{если } q > 1/2. \end{cases}$$

Найдем теперь ожидаемые выигрыши налогового инспектора:

$$\begin{aligned} &\text{проверять:} && p\cdot 1+(1-p)\cdot(-1)=2p-1,\\ &\text{не проверять:} && p\cdot 0+(1-p)\cdot 0=0. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогичным образом, найдем отклик инспектора:

$$q(p)=\begin{cases} 0, & \text{если } p<1/2,\\ [0,1], & \text{если } p=1/2,\\ 1, & \text{если } p>1/2. \end{cases}$$

Как мы уже видели, во многих играх, в которых игроки стремятся перехитрить друг друга, решение в чистых стратегиях не может существовать. Таким образом, концепция решения подобной игры должна включать рандомизацию и неопределенность по поводу действий других. Вообще говоря, чтобы в такой игре противник не догадался, какую именно чистую стратегию ты выбрал, следует вести себя непредсказуемо. В то же время если ты используешь смешанную стратегию и она выбрана правильно, то тебе нет необходимости скрывать свою смешанную стратегию. Эта идея лежит в основе равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

Профиль смешанных стратегий $\boldsymbol{\sigma}^*=(\boldsymbol{\sigma}_1^*,\dots,\boldsymbol{\sigma}_n^*)$ является равновесием Нэша в смешанных стратегиях, если стратегия $\boldsymbol{\sigma}_i^*$ каждого игрока $i=1,\dots,n$ является наилучшим для него откликом на стратегии других игроков $\boldsymbol{\sigma}_{-i}$.

Заметим, что *равновесие Нэша в смешанных стратегиях является обычным равновесием Нэша в так называемом смешанном расширении игры*, т. е. игре, чистые стратегии которой являются смешанными стратегиями исходной игры.

Найдем равновесие Нэша в смешанных стратегиях в Игре 30. Графики отображений отклика обоих игроков представлены на Рис. 3.5. По осям на этой диаграмме откладываются вероятности (q и p соответственно). Они имеют единственную общую точку $(1/2, 1/2)$. Эта точка соответствует равновесию Нэша в смешанных стратегиях. В этом равновесии, как это всегда бывает в равновесиях вполне смешанными стратегиями, каждый игрок рандомизирует стратегии, которые обеспечивают ему одинаковую ожидаемую полезность. Вероятности использования соответствующих чистых стратегий, выбранные игроком, определяются не структурой выигрышей данного игрока, а структурой выигрышей другого игрока (что может вызвать определенные трудности с интерпретацией данного решения).

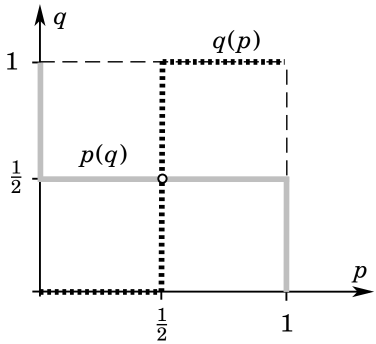


Рис. 3.5. Отображения отклика в игре «Инспекция»

В отличие от равновесия в чистых стратегиях, равновесие в смешанных стратегиях в конечных играх существует всегда. Это так называемая теорема Нэша.

> В любой конечной игре существует хотя бы одно равновесие Нэша в смешанных стратегиях.

Заметим, что существование в игре равновесия в чистых стратегиях не исключает существования равновесия в невырожденных смешанных стратегиях.

Рассмотрим в Игре 8 «Выбор компьютера» случай, когда выгоды от совместимости значительны, т. е. $a < c$ и $b < c$. В этом варианте игры два равновесия в чистых стратегиях: (IBM, IBM) и (Mac, Mac). Обозначим через p и q вероятности выбора компьютера IBM первым и вторым игроком соответственно. Если первый игрок выберет IBM, то его ожидаемый выигрыш составит

$$q \cdot (a+c) + (1-q) \cdot a = a + qc,$$

если же Mac, то

$$q \cdot 0 + (1-q) \cdot c = c - qc.$$

При $q > (c-a)/(2c)$ IBM выгоднее Mac, поскольку $a+qc > c-qc$, при $q < (c-a)/(2c)$ Mac выгоднее IBM. При $q > (c-a)/(2c)$ два типа компьютеров эквивалентны для первого игрока.

Рассчитайте функции ожидаемого выигрыша первого и второго игроков в Игре 8 как функции p и q, т. е. $U_1(p,q)$ и $U_2(p,q)$.

?

Таким образом, оптимальный отклик первого игрока имеет вид

$$p(q)=\begin{cases}0, & \text{если } q<(c-a)/(2c),\\ [0,1], & \text{если } q=(c-a)/(2c),\\ 1, & \text{если } q>(c-a)/(2c).\end{cases}$$

Если второй игрок выберет IBM, то его ожидаемый выигрыш составит

$$p\cdot c+(1-p)\cdot 0=pc,$$

если же Mac, то

$$p\cdot b+(1-p)\cdot(b+c)=b+c-pc.$$

При $p>(b+c)/(2c)$ для второго игрока IBM выгоднее Mac, поскольку $pc>b+c-pc$, при $p<(b+c)/(2c)$ Mac выгоднее IBM. При $p=(b+c)/(2c)$ два типа компьютеров эквивалентны для второго игрока. Таким образом, его отклик имеет вид

$$q(p)=\begin{cases}0, & \text{если } p<(b+c)/(2c),\\ [0,1], & \text{если } p=(b+c)/(2c),\\ 1, & \text{если } p>(b+c)/(2c).\end{cases}$$

Кривые наилучшего отклика изображены на Рис. 3.6. Равновесиям соответствуют точки пересечения двух кривых. В данной игре имеется три такие равновесные точки. Видно, что кроме двух равновесий в чистых стратегиях имеется одно равновесие в невырожденных смешанных стратегиях. Соответствующие вероятности равны

$$p=\frac{b+c}{2c} \quad \text{и} \quad q=\frac{c-a}{2c}.$$

3.7.1. Пример игры 3×2

Игра 31: Сын привык жить на иждивении родителей. Хотя родители любят сына, но им не хочется помогать ему, если он бездельничает. Родители могут помогать сыну материально или не помогать. Сын

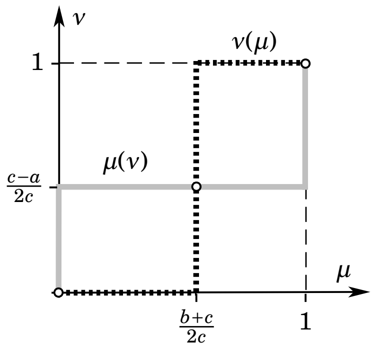


Рис. 3.6. Случай, когда в игре «Выбор компьютера» существует три равновесия, одно из которых — равновесие в невырожденных смешанных стратегиях

Найдите равновесия Нэша в смешанных стратегиях в Игре 18 и в Игре 24. ?

может искать постоянную работу, устроится на временную работу или сидеть дома и целыми днями смотреть по телевизору боевики. Если сын ищет постоянную работу, то он ее не обязательно найдет, но если ему повезет, то он сможет в дальнейшем жить без помощи родителей. Временную работу найти несложно, но платят за нее мало. Выигрыши приведены в Таблице 3.14. Для стратегии «искать работу» даны ожидаемые выигрыши, учитывающие вероятность неудачи. ⊙

Таблица 3.14. Данные для Игры 31

		Сын		
		искать работу	*временная работа*	*сидеть дома*
Родители	*помогать*	6, 8	2, 11	−2, 12
	не помогать	−2, 4	−1, 3	0, 0

Очевидно, что в этой игре нет равновесия Нэша в чистых стратегиях. Поэтому найдем равновесие Нэша в смешанных стратегиях.

Найдите в Игре 31 оптимальные отклики игроков в чистых стратегиях. Покажите, что в ней не существует равновесий Нэша в чистых стратегиях.

Пусть p — вероятность, с которой родители помогают сыну, q_1 — вероятность, с которой сын ищет работу, q_2 — вероятность, с которой сын работает временно, $q_3 = 1 - q_1 - q_2$ — вероятность, с которой сын сидит дома.

Найдем оптимальный отклик сына на смешанную стратегию родителей. Ожидаемый выигрыш от поиска постоянной работы равен

$$p \cdot 8 + (1 - p) \cdot 4 = 4p + 4.$$

Ожидаемый выигрыш от временной работы равен

$$p \cdot 11 + (1 - p) \cdot 3 = 8p + 3.$$

Ожидаемый выигрыш от безделья равен

$$p \cdot 12 + (1 - p) \cdot 0 = 12p.$$

Графики вычисленных ожидаемых выигрышей показаны на Рис. 3.7).

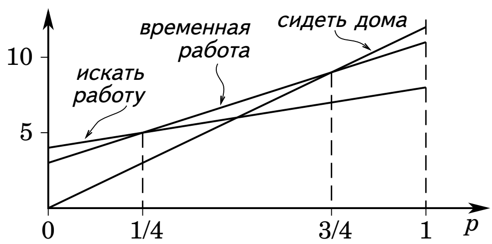


Рис. 3.7. Ожидаемые выигрыши сына в Игре 31

Сын безразличен между поиском постоянной работы и временной работой, когда

$$4p + 4 = 8p + 3,$$

т. е. при $p = 1/4$. Сын безразличен между временной работой и бездельем, когда

$$8p + 3 = 12p,$$

т. е. при $p = 3/4$. Таким образом, при $p < 1/4$ (малой вероятности получения родительской помощи) сын будет искать постоянную работу с вероятностью 1, при $p = 1/4$ он будет рандомизировать между поиском постоянной работы и временной работой, при $p \in (1/4; 3/4)$ он выберет временную работу с вероятностью 1, при $p = 3/4$ он будет рандомизировать между временной работой и бездельем, а при $p > 3/4$ (большой вероятности получения родительской помощи) он будет сидеть дома с вероятностью 1.

Проанализируем теперь поведение родителей. Если они будут помогать сыну, то их ожидаемый выигрыш составит

$$q_1 \cdot 6 + q_2 \cdot 2 + (1 - q_1 - q_2) \cdot (-2) = 8q_1 + 4q_2 - 2.$$

Если они не будут помогать сыну, то их ожидаемый выигрыш составит

$$q_1 \cdot (-2) + q_2 \cdot (-1) + (1 - q_1 - q_2) \cdot 0 = -2q_1 - q_2.$$

Родителям безразлично, помогать или нет, когда

$$8q_1 + 4q_2 - 2 = -2q_1 - q_2,$$

т. е. когда

$$q_2 = \frac{2}{5} - 2q_1.$$

Оптимальный отклик родителей имеет следующий вид:

$$p(q_1, q_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } q_2 < 2/5 - 2q_1, \\ [0; 1], & \text{если } q_2 = 2/5 - 2q_1, \\ 0, & \text{если } q_2 > 2/5 - 2q_1. \end{cases}$$

Графически этот оптимальный отклик можно показать на «карте» в координатах (q_1, q_2).

Равновесие Нэша можно найти перебором. По определению p должна быть оптимальным откликом на q_1 и q_2, а q_1 и q_2 должны быть оптимальным откликом на p.

При $p > 3/4$ сын выберет $q_1 = 0$, $q_1 = 0$ (т. е. сын бездельничает с вероятностью 1). При этом $q_2 < 2/5 - 2q_1$ и откликом родителей на такие q_1 и q_2 должна быть вероятность $p = 0$ (не помогать с вероятностью 1). Противоречие. Этого не может быть в равновесии.

При $p = 3/4$ сын выберет $q_1 = 0$. Родители могут выбрать вполне смешанную стратегию $p = 3/4$, только если $q_2 = 2/5 - 2q_1$. Таким образом, должно быть $q_1 = 0$, $q_2 = 2/5$ и $q_3 = 3/5$. Это равновесие.

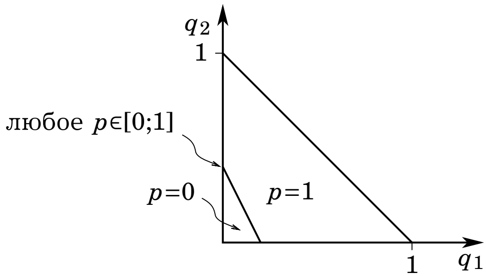


Рис. 3.8. Графическая иллюстрация оптимального отклика родителей в Игре 31

При $p < 3/4$ сын выберет $q_3 = 0$. При этом $q_2 > 2/5 - 2q_1$ и откликом родителей на такие q_1 и q_2 должна быть вероятность $p = 1$. (Если сын не бездельничает, то родителям заведомо выгодно ему помогать, поскольку $6 > -2$ и $2 > -1$.) Противоречие. Этого не может быть в равновесии.

Таким образом, в рассматриваемой игре существует единственное равновесие при $p = 3/4$, $q_1 = 0$, $q_2 = 2/5$ и $q_3 = 3/5$.

3.8. Гарантированный выигрыш. Подход фон Неймана для игры двух лиц с нулевой суммой

3.8.1. Гарантированный выигрыш

Если игрок i выбрал стратегию s_i, то его выигрыш u_i все же должен зависеть от тех стратегий $\mathbf{s}_{-i}$, которые выбрали другие ($u_i = u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i})$). Выше мы уже обсуждали эту проблему. Можно заметить, что при выборе s_i игрок i никак не может получить меньше, чем

$$\min_{\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i})$$

— это выигрыш игрока i, который он бы получил, если бы остальные игроки вздумали сознательно ему вредить, зная, что тот выбрал стратегию s_i. Игрок i в любом случае при надлежащем выборе своей стратегии s_i может обеспечить себе выигрыш, не меньший чем

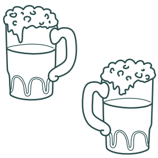
$$\underline{u}_i = \max_{s_i \in S_i} \min_{\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}).$$

Если игрок i рационален, то это нижняя граница для его выигрыша в любом разумном решении игры. Данную величину принято называть **гарантированным выигрышем** или **максимином**. Если некоторый профиль стратегий не обеспечивает хотя бы одному из игроков гарантированного выигрыша, то он вряд ли может быть признан разумным решением игры.

Этот критерий приемлемости решения игры был предложен одним из крупнейших математиков XX века Джоном фон Нейманом. Исторически это был фактически первый принцип поиска решения, который был предложен в теории игр.

Рассмотрим в качестве примера Игру 23. Для того, чтобы найти гарантированный выигрыш Бара 1, следует в каждой из строчек найти его минимально возможный выигрыш. Это 7, 8 и 12 соответственно. Гарантированный выигрыш — максимальный среди них, т. е. 12. Аналогично для Бара 2 минимальные выигрыши по столбцам — это 5, 4 и 6. Следовательно, 6 — гарантированный выигрыш. (См. Рис. 3.15.)

Таблица 3.15. Гарантированные выигрыши для Игры 23



		Бар 2			
		1¤	2¤	3¤	
Бар 1	1¤	× 7, 5	× 10, 4	× 10, 6	7
	2¤	× 8, 8	14, 10	20, 6	8
	3¤	12, 8	12, 16	21, 15	12*
		5	4	6*	

Исходы, в которых $u_1 < 12$ или $u_2 < 6$ не удовлетворяют критерию фон Неймана. На Рис. 3.15 такие исходы отмечены красными крестиками.

Заметим, что любое равновесие Нэша удовлетворяет этому критерию.

> Найдите гарантированные выигрыши в Игре 25. Какие исходы удовлетворяют критерию фон Неймана? Удовлетворяет ли данному критерию равновесие Нэша этой игры? **?**

Проблема с критерием фон Неймана состоит в том, что для большинства игр он дает очень неточные предсказания — слишком много исходов (и соответствующих профилей стратегий) остается «невычеркнутыми».

3.8.2. Игры двух лиц с нулевой суммой. Теорема о минимаксе

Критерий фон Неймана помогает найти определенное решение в частном случае игры двух лиц с нулевой суммой.

Игры с нулевой суммой таковы, что в них то, что один игрок выигрывает, то другой игрок проигрывает. Сумма выигрышей равна нулю. Это частный случай игр с постоянной суммой. В качестве примера можно привести шахматы. В шахматах и других аналогичных играх если один игрок выиграл, то другой проиграл. Трем возможным исходам в шахматах можно сопоставить векторы выигрышей $(1;-1)$, $(-1;1)$ и $(0;0)$ (для ничьей).

Если интересы игроков противоположны, то у них нет основы для сотрудничества. Если игрок поможет другому игроку, то он навредит себе. Интересы игроков диаметрально противоположны.

Но так бывает только в играх двух лиц. Если игроков больше двух, то часть игроков (коалиция) может кооперироваться с целью обеспечить своим членам более высокий выигрыш за счет не-членов.

Игры, в которых сумма выигрышей непостоянна, называют играми с переменной суммой. В игре двух лиц с переменной суммой в отличие от игр двух лиц с нулевой (или постоянной) суммой возможно получение выгоды от сотрудничества.

Рассмотрим подход фон Неймана. Можем обозначить функцию выигрыша первого игрока через $u(s,t) = u_1(s,t)$. В таком случае $u_2(s,t) = -u(s,t)$. Здесь s — стратегия первого, t — стратегия второго. Гарантированные выигрыши двух игроков равны

$$\underline{u}_1 = \max_s \min_t u(s,t)$$

и

$$\underline{u}_2 = \max_t \min_s (-u(s,t)).$$

Гарантированный выигрыш второго игрока можно переписать в виде

$$\underline{u}_2 = -\min_t \max_s u(s,t).$$

(Минимизировать $-f$ — это все равно, что максимизировать f, а максимизировать $-f$ — это все равно, что минимизировать f.)

Если реализовался исход, в котором игроки имеют выигрыши (u_1, u_2) (где $u_2 = -u_1$), то согласно критерию фон Неймана эти выигрыши должны удовлетворять неравенствам $u_1 \geq \underline{u}_1$ и $u_2 \geq \underline{u}_2$. Таким образом, получаем следующие оценки для выигрышей:

$$\underline{u}_1 \leq u_1 = -u_2 \leq -\underline{u}_2$$

или

$$\max_s \min_t u(s,t) \leq u_1 = -u_2 \leq \min_t \max_s u(s,t).$$

Видим, что выигрыш игрока должен лежать между максимином и минимаксом. Если максимин и минимакс совпадают, то точно знаем те выигрыши, которые игроки должны получить «в любом разумном решении».

Имеет место следующая теорема о минимаксе:

> В конечных играх двух лиц с нулевой суммой при использовании смешанных стратегий максимин и минимакс совпадают и однозначно задают выигрыши (имеется «цена игры»).

Отметим важный факт. Равновесие Нэша удовлетворяет критерию фон Неймана. В связи с этим для отыскания решения в смысле фон Неймана достаточно найти равновесие Нэша в смешанных стратегиях.

Рассмотрим пример игры двух лиц с нулевой суммой и найдем в ней решение по фон Нейману.

Игра 32: В поезде к игроку 1 подходит гражданин располагающей наружности — Игрок 2 — и предлагает для развлечения сыграть в игру. Игрок 1 прячет что-нибудь в левой или правой руке. Игрок 2 угадывает. Если Игрок 2 не угадает, то в случае (*Л*, *П*) он платит первому 10 руб., а в случае (*П*, *Л*) он платит первому 90 руб. Если же Игрок 2 угадает, то Игрок 1 выплачивает ему 50 руб. в каждом из случаев (*Л*, *Л*) и (*П*, *П*). ⊙

Выигрыши описанной игры приведены в Таблице 3.16.

Пусть p — вероятность выбора *Л* Игроком 1, а q — вероятность выбора *Л* Игроком 2. Найдем ожидаемый выигрыш Игрока 1:

$$\begin{aligned} U_1 = p\cdot(q\cdot(-50)+(1-q)\cdot 10)+(1-p)\cdot(q\cdot 90+(1-q)\cdot(-50)) = \\ = q(-50p-10p+90(1-p)+50(1-p))+10p-50(1-p) = \\ q(140-200p)+60p-50. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Таблица 3.16. Данные для Игры 32

		Игрок 2	
		Л	*П*
Игрок 1	*Л*	50 −50	−10 10
	П	−90 90	50 −50

Сначала следует решить задачу минимизации U_1 по q (каким образом Игрок 2 может причинить наибольший вред Игроку 1). Получим следующее решение (оно совпадает с оптимальным откликом Игрока 2):

$$q = \begin{cases} 1, & \text{если } p > 0{,}7, \\ [0;1], & \text{если } p = 0{,}7, \\ 0, & \text{если } p < 0{,}7. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\min_q U_1 = \begin{cases} 90 - 140p, & \text{если } p \geq 0{,}7, \\ 60p - 50, & \text{если } p \leq 0{,}7. \end{cases}$$

Этот минимум достигает максимума по p при $p^* = 0{,}7$, так что $\underline{u}_1 = -8$ (см. Рис. 3.9).

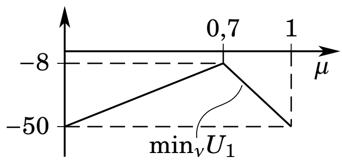


Рис. 3.9. Игра 32

Аналогично ищется минимакс. Сначала, максимизируя U_1 по p (и, тем самым, минимизируя U_2 по p — какое значение p должен выбрать Игрок 1, чтобы как можно сильнее навредить Игроку 2) получаем

$$p = \begin{cases} 1, & \text{если } q < 0{,}3, \\ [0;1], & \text{если } q = 0{,}3, \\ 0, & \text{если } q > 0{,}3. \end{cases}$$

(Это совпадает с оптимальным откликом Игрока 1, поскольку игра с нулевой суммой, но имеет совсем другой смысл.) Соответствующий максимум равен (в зависимости от q)

$$\max_p U_1 = \begin{cases} 10 - 60q, & \text{если } q \le 0{,}3, \\ 140q - 50, & \text{если } q \ge 0{,}3. \end{cases}$$

Минимум по q этого максимума достигается при $q^* = 0{,}3$ и равен -8. Таким образом, $\underline{u}_2 = 8$.

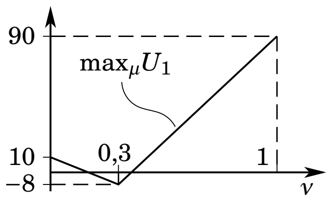


Рис. 3.10. Игра 32

Видим, что, как и предсказывает теорема о минимаксе, минимакс и максимин здесь совпадают. В этой игре Игрок 2 оказывается в выгоде. Таким образом, Игроку 1 лучше не играть в такую игру — гражданин располагающей наружности по всей видимости является мошенником.

> Найдите в Игре 32 равновесие Нэша в смешанных стратегиях и убедитесь в том, что оно совпадает с решением фон Неймана.

Подход фон Неймана позволяет анализировать только очень узкий класс игр. Он не очень интересен с точки зрения моделирования экономических явлений. Интересы игроков редко бывают диаметрально противоположны. Например, если две фирмы производят один и тот же продукт, то они конкурируют друг с другом. Но у таких фирм есть потенциальные возможности сотрудничества, поскольку сумма прибылей фирм — не константа.

Глава 4

Динамические игры с полной и совершенной информацией

Понятие динамических игр с совершенной информацией. Не заслуживающие доверия угрозы и обещания. Свертывание игры (обратная индукция). Связь развернутой и нормальной форм. Подыгры. Совершенные в подыграх равновесия. Некооперативный торг.

4.1. Введение

Многие ситуации, включающие взаимодействие индивидуумов, являются по своему смыслу динамическими. Люди взаимодействуют друг с другом во времени и принимают решения, реагируя на те решения, которые ранее приняли другие. Другими словами, принимая решения, отдельный игрок может располагать информацией о решениях, которые уже приняты другими игроками, что предполагает очередность принятия решений (очередность ходов).

Динамические игры моделируют взаимодействия, развивающиеся во времени. **Динамической** будем называть такую игру, в которой каждый игрок может сделать несколько ходов и по крайней мере один из игроков, делая ход, знает, какой ход сделал другой игрок (возможно, он сам). В этой ситуации он стоит перед *свершившимися фактами* (уже сделанными ранее и известными ему ходами) и должен учитывать их при выборе своих действий.

Особый тип игры — это динамическая игра с совершенной информацией. Под **игрой с совершенной информацией** понимают такую игру, в которой игроки знают все предыдущие действия (предпринятые ими самими или другими игроками) и результаты случайных ходов природы, так что когда игрок должен принять решение, он обладает полной информацией о том, в какой игровой ситуации он находится. Примером динамической игры с совершенной информацией являются шахматы.

?

Можно ли считать динамической игрой с совершенной информацией шахматы, если то, кто из игроков играет белыми, определяется жребием?

?

Можно ли считать динамической игрой с совершенной информацией такие карточные игры как бридж или покер?

(Напомним, что игра с полной информацией — это такая игра, в которых каждый из игроков точно знает характеристики других игроков. Мы продолжаем рассматривать именно такие игры.)

4.2. Динамические игры, полученные на основе статических

Чтобы увидеть различие между динамическими и статическими играми, можно рассмотреть динамическую игру, полученную из статической игры двух лиц. В этой динамической игре возможные действия и выигрыши такие же, как и в исходной статической игре, но один из игроков делает ход раньше другого.

Рассмотрим, например, Игру 8 «Выбор компьютера» при $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$ (Таблица 4.1). Это случай, когда оба игрока сильно ценят совместимость компьютеров. Оптимальные отклики показаны подчеркиванием. Если игра статическая, то в ней существует два равновесия, в каждом из которых компьютеры совместимы. Что будет если игроки ходят по очереди?

Предположим, что Игрок 1 имеет возможность принять решение первым и сообщить о нем Игроку 2. При этом можно предсказать

Таблица 4.1. Игра 8 при $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$

		Игрок 2: *IBM*	Игрок 2: *Mac*	
Игрок 1	*IBM*	$\underline{5}$, $\underline{3}$	2, 1	5 ⟵
	Mac	0, 0	$\underline{3}$, $\underline{4}$	3

как поступит Игрок 2 — он выберет компьютер того же типа, что и Игрок 1, поскольку ценит совместимость. Это оптимальный отклик Игрока 2. Зная этот отклик, Игрок 1, может спланировать свои действия оптимальным образом. Ему выгодно выбрать компьютер любимого типа (т. е. IBM), поскольку при этом выигрыш будет выше ($5 > 3$). Таким образом, должен реализоваться исход (IBM, IBM). В этой игре игрок, который имеет возможность сделать выбор первым, получает преимущество.

> Проанализируйте динамический вариант Игры 24 «Chicken». Получает ли в этой игре преимущество тот игрок, который ходит первым?

Рассмотрим теперь Игру 8 «Выбор компьютера» при $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$ (Таблица 4.2).

Таблица 4.2. Игра 8 при $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$

		Игрок 2: *IBM*	Игрок 2: *Mac*	
Игрок 1	*IBM*	3, $\underline{2}$	1, $\underline{2}$	3 или 1
	Mac	0, 0	2, $\underline{4}$	2

Здесь решение неоднозначно, так как оптимальный отклик Игрока 2 неоднозначен.

(Потенциально Игрок 2 за счет общения до игры может угрожать Игроку 1. Это угроза может заслуживать доверия, поскольку Игроку 2 все равно. Это отличается от не заслуживающих доверия угроз в играх, которые мы рассмотрим в дальнейшем.)

> Проанализируйте динамический вариант Игры 18, в котором один из игроков делает выбор первым. Что поменяется по сравнению со статической игрой?

> Проведите анализ Игры 23, предполагая, что Бар 1 выбирает свою цену первым.
> Проведите такой же анализ, предполагая, что первым выбирает свою цену Бар 2.

4.3. Пример динамической игры с совершенной информацией

Приведем теперь пример игры, которая с самого начала задана как динамическая.

Игра 33 (За́мок на острове): [11] Игрок 1 — это предводитель викингов, пытающийся захватить замок, который располагается на острове посреди моря. Войско Игрока 1 приплыло к острову на корабле. Игрок 2 — это хозяин замка. Игрок 2 может либо обороняться, либо капитулировать. Если Игрок 2 примет решение обороняться, то Игрок 1 может либо атаковать замок, либо уплыть с острова. Известно, что если Игрок 1 атакует, то он займет замок. Правда, в этом случае он потеряет значительную часть своего войска, так что ему выгоднее уплыть с острова. Кроме того известно, что если бы игрок Игрок 2 точно знал, что Игрок 1 атакует, то ему выгоднее было бы капитулировать, чем обороняться. ⊙

Здесь дано (не совсем полное) описание развернутой формы игры. Как уже обсуждалось ранее, такую игру удобно представить в виде дерева. На Рис. 4.1 показано дерево данной игры с некоторыми условными выигрышами, которые удовлетворяют приведенному описанию.

> Изобразите динамические игры из параграфа 4.2 в виде деревьев.

Это игра с совершенной информацией, поскольку Игрок 1, делая выбор, знает предыдущую историю игры, то есть то, какой выбор сделал Игрок 2. Если говорить с точки зрения представления игры в виде дерева, Игрок 1 знает, в какой из возможных ситуаций (вершин дерева) он находится.

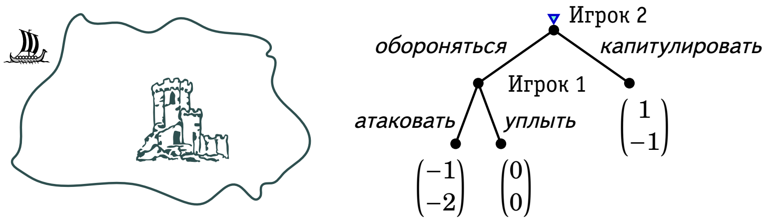


Рис. 4.1. Дерево Игры 33

Проанализируем данную игру. Если бы Игрок 2 верил, что Игрок 1 атакует, то он бы капитулировал, и Игрок 1 взял бы замок без боя. Однако Игрок 2 должен осознавать, что если он будет обороняться, то Игрок 1 предпочтет уплыть. Таким образом, Игрок 2 не капитулирует, а Игрок 1 уплывет ни с чем.

4.4. Не заслуживающие доверия угрозы и обещания

Игра 34 («Просьба о повышении зарплаты»): [11] Клерк хочет добиться, чтобы его месячную зарплату повысили на $500. Однако, фирма, в которой он работает, любит экономить на зарплате работников, так что прибавку дадут только если клерк каким-то образом сумеет убедить своего босса, что тому выгодно это сделать. По крайней мере, фирма должна проиграть от ухода клерка не менее $500. Если он действительно настолько ценный работник, то у клерка есть шанс получить прибавку, если ему удастся убедить босса, что он уйдет с работы, если не получит желаемого. ⊙

На Рис. 4.2 показано дерево описанной игры. Игра начинается в вершине A, где клерк просит о повышении зарплаты. Тогда в вершине B босс выбирает, согласиться на это повышение или нет. Если он согласится, то игра переходит в вершину C, где клерк либо остается на своей работе, либо уходит. Таким образом, в этой игре есть три возможных исхода.

Если клерк просто скажет боссу, что он уйдет, если ему не повысят зарплату, то босс может не поверить такой угрозе. Чтобы босс

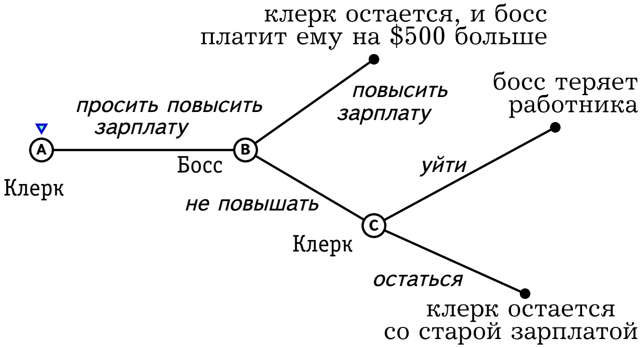


Рис. 4.2. Дерево игры «Просьба о повышении зарплаты»

воспринял угрозу уйти серьезно, он должен увидеть, что клерку выгодней уйти, если ему не дадут прибавку. Лучший способ сделать угрозу заслуживающей доверия — доказать боссу, что другая фирма готова платить на \$500 в месяц больше. (Конечно, если клерк и в самом деле найдет другую фирму, в которой ему будут платить больше, то можно воспользоваться этой возмоностью сразу.)

Другой способ для клерка получить прибавку к зарплате заключается в том, чтобы сообщить каждому в фирме, что он непременно уйдет, если не получит желаемого. Клерк должен сделать так, чтобы ему было невыносимо стыдно остаться на работе в случае, если ему откажут в прибавке. Тем самым он лишит себя свободы действий — он вынужден будет уйти, если не получит прибавку. Поняв это, босс даст свое согласие.

Очевидно, что босс удовлетворит просьбу клерка, только если он будет знать, что в вершине C тот предпочтет уйти. Значит, клерк должен сделать свою угрозу заслуживающей доверия. Это можно осуществить либо за счет высокого выигрыша в случае ухода, или низкого выигрыша, если он останется, при том что просьба о повышении зарплаты на будет удовлетворена. Интересно, что если клерк получит свою прибавку, то игра никогда не попадет в вершину C. В то же время, причиной победы клерка будет осознание боссом того, как тому выгоднее поступить в вершине C. Часто исход игры определяется тем, что *могло бы* случиться, но не случилось.

Вернемся к рассмотренной ранее Игре 33. Если бы Игрок 1 обещал атаковать замок, то Игроку 2 не стоило бы верить. Это тоже не заслуживающая доверия угроза. Однако мы можем рассмотреть более сложную игру, в которой Игрок 1 все же захватит замок.

Игра 35 (Замок-2): Предположим, что ситуация такая же, как и в Игре 33, но до того как примет решение Игрок 2, Игрок 1 может сжечь корабль, на котором приплыл. Если корабля не будет, то можно будет соорудить новый корабль, только если захватить замок. Таким образом, если Игрок 1 сожжет корабль, то у него не будет другого выхода кроме как атаковать. ⊙

Если Игрок 1 не станет сжигать корабль, то повторится Игра 33, если же Игрок 1 сожжет корабль, то ситуация будет отличаться от Игры 33 только тем, что у Игрока 1 будет меньше выбора — он не сможет уплыть. Дерево этой модифицированной игры изображено на Рис. 4.3.

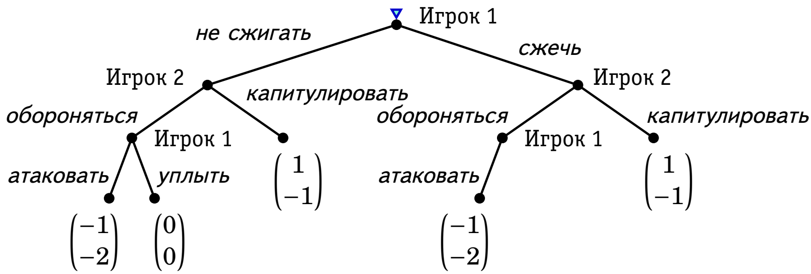


Рис. 4.3. Дерево Игры 35

Потеря корабля заставит Игрока 1 атаковать. Игрок 2 тогда поймет, что Игрок 1 не отступится, и ему выгоднее будет капитулировать. Таким образом, Игроку 1 следует сжечь корабль.

Принято считать, что иметь более широкий выбор — это хорошо. Однако в рассматриваемом случае это не так. Уничтожая корабль, Игрок 1 ограничивает свой выбор, но именно это позволяет ему одержать бескровную победу.

Рассмотрим теперь на примере другой игры не заслуживающие доверия посулы.

Игра 36 («Король и рыцарь»): В некотором королевстве поселился дракон, который опустошает окрестности и пожирает жителей. Король обещает прославленному рыцарю, что отдаст тому половину королевства, если он убьет дракона. Сначала должен принять решение рыцарь. Если он решит сражаться, то точно победит дракона. После того, как дракон побежден, король решает, отдать ли рыцарю полкоролевства. ⊙

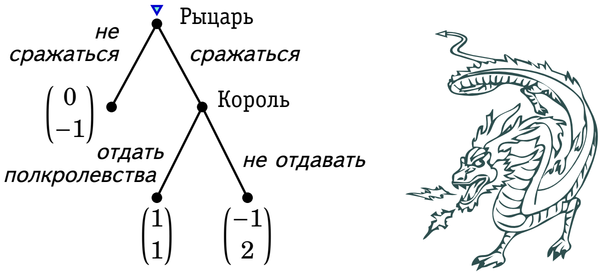


Рис. 4.4. Дерево Игры 36

Игра с подходящими под описаниями выигрышами изображена в виде дерева на Рис. 4.4. Очевидно, что как только дракон побежден, то королю не выгодно выполнять свое обещание. Рыцарь может понять, что король не отдаст полкоролевства и откажется сражаться. Такая ситуация не выгодна как рыцарю, так и королю ($0 < 1$ и $-1 < 1$), т. е. исход («сражаться», «отдать полкоролевства») доминирует по Парето исход «не сражаться». Королю выгодно каким-то образом дать понять рыцарю, что он не может не сдержать обещание. Например, может быть, в этой сказочной ситуации есть какая-то страшная клятва, дав которую, король уже будет вынужден выполнить то, что обещал. Эта игра представляет собой еще один пример того, как игрок, лишая себя свободы действий в будущем, получает более высокий выигрыш.

Модифицируйте дерево игры, показанное на Рис. 4.4, включив в игру возможность дать клятву. **?**

4.5. Свертывание игры (обратная индукция)

Решение игры можно найти в предположении, что игроки рациональны и что рациональность и структура игры являются общеизвестными фактами. При этом естественно воспользоваться методом обратной индукции. В соответствии с этим методом игру «разматывают» с конца. По сути дела, мы уже пользовались обратной индукцией, анализируя предыдущие игры в этой главе. Рассмотрим еще одну игру, несколько более обширную и подробно объясним, как пользоваться обратной индукцией.

Игра 37: Два школьника, A и B, играют в следующую игру. Каждый из кучки, состоящей из N камней, берет по очереди один или два камня. Первым ходит A. Игрок, взявший последний камень, проигрывает. ⊙

На Рис. 4.5(a) изображено дерево этой игры при $N = 4$. Проведем анализ этой игры при $N = 4$, используя обратную индукцию. У игроков в вершинах A_3, A_4 и B_3 нет выбора, поскольку действие только одно. Эти вершины можно сделать конечными, сопоставив им соответствующие выигрыши. Если осталось два камня, то выгоднее взять один камень, а не два. Это относится к выбору игрока A в вершине A_2 и к выбору игрока B в вершине B_2. Игру можно свернуть, сопоставив вершине A_2 выигрыши $(1;-1)$, а вершине B_2 — выигрыши $(-1;1)$. В результате получится дерево, показанное на Рис. 4.5(b).

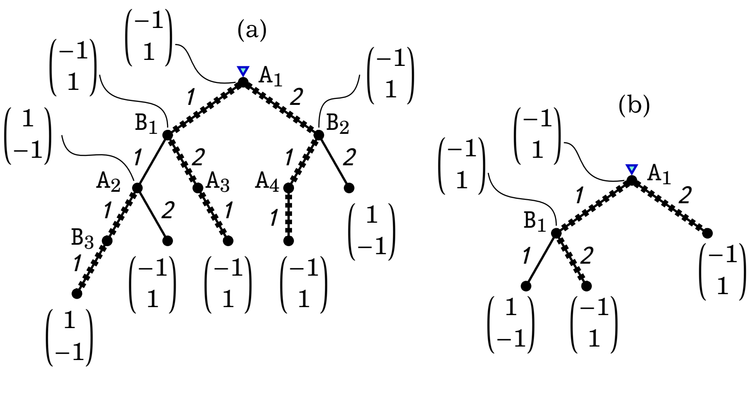


Рис. 4.5. (a) Дерево Игры 37 при $N = 4$. (b) То же дерево после частичного сворачивания

В вершине B_1 игроку B выгоднее взять два камня. В вершине A_1 игроку A все равно, сколько камней брать, один или два, так как в любом случае он проиграет.

В Игре 37 и ранее рассмотренных в этой главе играх обратная индукция всегда «работала», всегда давала решение. Это общее свой-

Изобразите дерево Игры 37 при $N = 5$. Найдите решение обратной индукцией.

?

С помощью обратной индукцией найдите решение Игры 37 при произвольном N.

?

ство конечных динамических игр (т. е. игр, дерево которых имеет конечное число вершин и конечное число ветвей).

В конечной динамической игре с совершенной информацией алгоритм обратной индукции дает хотя бы одно решение.

Изобразите графически обратную индукцию на дереве Игры 35 (Рис. 4.3).

?

В случае, когда в динамической игре участвуют два игрока, и игра происходит в 2 этапа, то обратную индукцию бывает удобно провести на основе функции отклика второго игрока на действия первого. Следующая игра иллюстрирует использование этого приема для игры с непрерывными стратегиями.

Игра 38 («Рэкет»[1]): Рэкетиры выбирают, какую долю α ($\alpha \in [0;1]$) выручки отбирать у фирмы. Они при этом максимизируют $\alpha p y$, где p — цена, y — выпуск фирмы. Фирма имеет квадратичную функцию издержек, так что ее прибыль (выигрыш) равна

$$(1-\alpha)py - y^2.$$

Фирма максимизирует прибыль при ограничении $y \geq 0$. Рэкетиры делают ход первыми. Зная, какую долю выручки они хотят отбирать, фирма выбирает уровень выпуска. ⊙

На Рис. 4.6 изображена структура описанной игры. Поскольку множества возможных действий игроков в рассматриваемой игре не конечны (например, у рэкетиров — интервал $[0;1] \in \mathbb{R}$), то на рисунке

[1] Можно интерпретировать игру несколько по другому: вместо рэкетиров рассматривать государство, устанавливающее ставку налога.

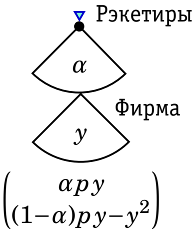


Рис. 4.6. Игра «Рэкет»

они изображены в виде секторов. При этом из каждой точки верхнего сектора, соответствующего выбору α, начинается некий сектор, соответствующий выбору y. На рисунке представлен лишь один из таких нижних секторов. Поскольку в данной игре имеется бесконечное множество (континуум) действий и исходов, на диаграмме уместно представить способы вычисления выигрышей для выбранных действий игроков как функции от действий игроков.

Рэкетиры, зная функцию выигрыша фирмы, могут определить, как скажется на ее выпуске выбор ими экспроприируемой доли выручки этой фирмы. Для того, чтобы предсказать объем выпуска, им необходимо решить задачу фирмы: максимизировать прибыль по y при заданном α. Условия первого порядка такой задачи имеют вид:

$$(1-\alpha)p-2y=0.$$

Если $\alpha<1$, то $y>0$. Поскольку функция прибыли вогнута, то условие первого порядка является достаточным, т. е. определяемый на его основе объем выпуска фирмы является оптимальным. При $\alpha=1$ получаем решение $y=0$. Таким образом, рэкетиры могут вывести уравнение оптимального выпуска фирмы как функции доли α:

$$y(\alpha)=\frac{(1-\alpha)p}{2}.$$

Зная эту функцию отклика, рэкетиры максимизируют свою целевую функцию[2], т. е. решают следующую задачу

$$\alpha p y(\alpha)\to\max_{\alpha\in[0;1]}$$

[2]В моделях налогообложения аналог функции $\alpha p y(\alpha)$ известен как кривая Лаффера.

или, после подстановки $y(\alpha)$,

$$\frac{p^2}{2}\cdot(1-\alpha)\alpha \to \max_{\alpha\in[0;1]}.$$

Максимум достигается при $\alpha = 1/2$, то есть рэкетиры будут отбирать у фирмы половину выручки. При этом выпуск фирмы составит $p/4$. Графически поиск решения представлен на Рис. 4.7.

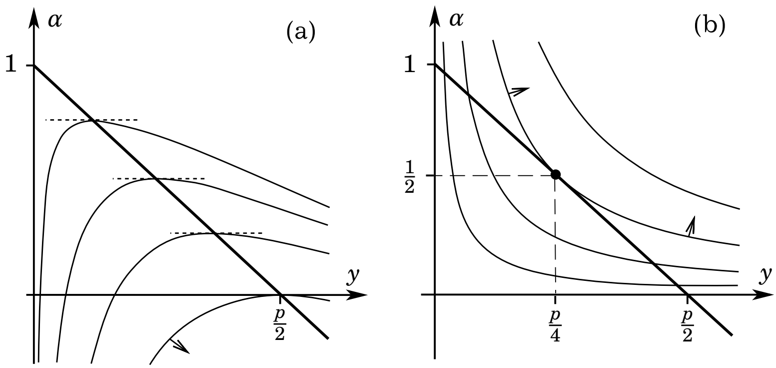


Рис. 4.7. (a) Получение функции отклика фирмы; (b) выбор рэкетирами оптимальной отбираемой доли.

Существуют динамические игры, в которых каждый раз при использовании обратной индукции оптимальный выбор единствен. Если это не так, процесс поиска решения разветвляется — решение будет зависеть от того, какую именно альтернативу из тех, которые дают игроку одинаковый выигрыш, выберет этот игрок. На Рис. 4.8 показано использование обратной индукции в такой игре. В этой игре обратная индукция дает два решения: (L_1,R_2) и (L_2,R_1).

Если выигрыши всех игроков во всех конечных вершинах различны, то неоднозначности при использовании обратной индукции не возникает, поэтому решение должно быть единственным.

> Если в конечной динамической игре с совершенной информацией, не содержащей случайные ходы природы, выигрыши всех игроков во всех конечных вершинах различны, то алгоритм обратной индукции дает ровно одно решение.

Рассмотрим обратную индукцию в игре, включающей ходы природы. Это игра с совершенной информацией, и результаты ходов

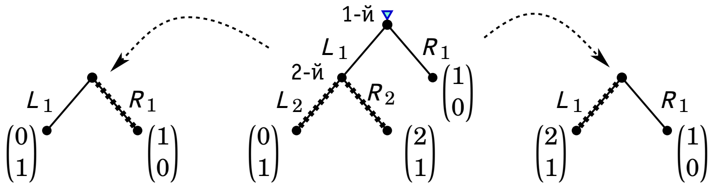


Рис. 4.8. Разветвление решения при использовании обратной индукции

природы становятся известными после того, как ход сделан. В тех вершинах, где ход принадлежит обычному игроку, надо сравнивать выигрыши этого игрока при всех возможных его действиях. В тех вершинах, где ход делает природа, надо рассчитывать ожидаемые выигрыши игроков.

Игра 39 («Дуэль»): Три гусара, Василий, Григорий и Денис, решили устроить дуэль по нестандартным правилам. Гусары становятся по вершинам равностороннего треугольника и каждый может сделать один выстрел в одного из противников. Очередность выстрелов устанавливается жребием. На выбранном расстоянии Василий промахивается в половине случаев, Григорий — в одном случае из пяти, а Денис всегда попадает. Если застрелить Василия, то это принесет 1 очко, Григория — 2 очка, а Дениса — 3 очка. Если гусар никого не застрелит, то получит 0 очков. Если гусара самого застрелят, то его выигрыш становится на 2 очка меньше. ⊙

Пусть, например, в соответствии со жребием установлена следующая очередность выстрелов: Василий, потом Григорий, потом Денис. Изобразим эту игру в виде дерева (см. Рис. 4.9). Спиралью со стрелкой для экономии места указана ветвь дерева, которая повторяется. Если Василий не попадет в Дениса, то ситуация окажется точно такой, как если бы он не попал в Григория.

Свернем частично эту игру, рассмотрев мотивацию Дениса. Денису всегда, когда есть выбор, выгоднее стрелять в Григория, чем в Василия, поскольку это приносит больше очков. Можно также свернуть ветвь, относящуюся к ситуации, когда Василий попадет в Дениса. Григорий, стреляя в Василия попадет в 80% случаев и промахнется в 20% случаев. Ожидаемые выигрыши игроков в этом случае составят $0{,}8\cdot 1+0{,}2\cdot 3=1{,}4$ для Василия, $0{,}8\cdot 1+0{,}2\cdot 0=0{,}8$ для Григория и -2 для Дениса. Получим дерево игры, изображенное на Рис. 4.10.

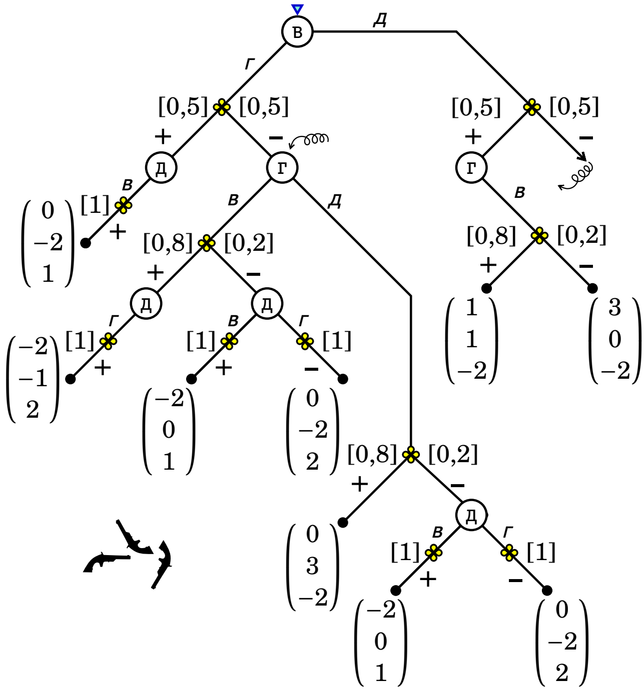


Рис. 4.9. Дуэль

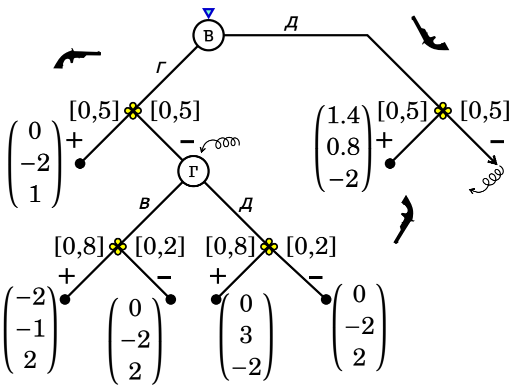


Рис. 4.10. Дуэль, свернутое дерево игры

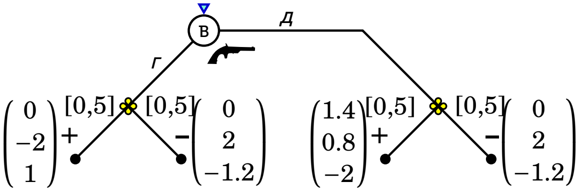


Рис. 4.11. Дуэль, выбор Василия

Далее рассмотрим выбор Григория в случае промаха Василия. Если он выстрелит в Василия, то его ожидаемый выигрыш составит $0{,}8\cdot(-1)+0{,}2\cdot(-2)=-1{,}2$, а если в Дениса, то $0{,}8\cdot 3+0{,}2\cdot(-2)=2$, т. е. он выстрелит в Дениса. Ожидаемые выигрыши игроков будут в этом случае равны $(0, 2, -1{,}2)$. Эти рассуждения относятся и к левой части дерева (после того, как Василий выстрелит в Григория) и к правой (после того, как Василий выстрелит в Дениса). В результате, в качестве дерева свернутой игры получаем дерево решений для Василия (см. Рис. 4.11).

Выстрелив в Григория, Василий получит нулевой ожидаемый выигрыш. Выстрелив в Дениса, он получит ожидаемый выигрыш $0{,}5\cdot 1{,}4+0{,}5\cdot 0=0{,}7$. Таким образом, Василий выстрелит в Дениса. Ожидаемый выигрыш от игры составит 0,7 для Василия, 1,4 для Григория и −1,6 для Дениса. Несколько парадоксально, но лучше всех стреляющий Денис оказывается в этой игре в самом невыгодном положении.

Разберите, пользуясь приведенным образцом, остальные пять случаев очередности выстрелов в игре «Дуэль». Какая очередность наиболее выгодна для Василия? ?

Что, если в игре «Дуэль» гусары будут стрелять по очереди друг в друга до тех пор, пока в живых не останется только один гусар? (Это сложный вопрос!) ?

4.6. Нормальная форма динамической игры. Совершенное в подыграх равновесие

4.6.1. Нормальная форма динамической игры

Мы рассмотрели, как находить решение динамической игры с совершенной информацией с помощью обратной индукции. Другой подход состоит в том, чтобы применить к динамической игре концепцию равновесия Нэша, так же, как мы применяли ее к статическим играм.

Для того чтобы это сделать, следует записать динамическую игру в нормальной (стратегической) форме. Как мы помним, описание игры в нормальной форме состоит из задания

- множества игроков,
- множества стратегий каждого игрока,
- функции выигрыша каждого игрока на множестве возможных профилей стратегий.

Множество игроков, конечно, должно быть одним и тем же в нормальной форме и в развернутой форме игры. Прежде всего уточним понятие стратегии для игр такого типа.

Как уже обсуждалось, в игре в развернутой форме (чистая) стратегия — это полный план действий игрока, который предусматривает, что игрок будет делать в каждой из вершин, в которой ход принадлежит ему. Это должен быть действительно *полный* план, то есть в нем должно быть определено, что игрок выберет в *любой* своей вершине, даже если из каких-либо соображений ясно, что процесс игры вряд ли может привести в эту вершину.

Стратегия — это настолько полный план действий, что доверенное лицо игрока может использовать его в качестве инструкции, будучи уверенным, что его поведение будет совпадать с поведением самого игрока. Процесс игры для динамической игры в нормальной форме можно условно представить себе следующим образом. Каждый игрок до начала игры сообщает выбранную им стратегию организатору игры. Организатор, руководствуясь этими стратегиями, осуществляет за игроков их ходы и производит случайные ходы природы. Когда последовательность ходов приведет организатора в конечную вершину и реализуется определенный исход, он раздает всем игрокам выигрыши, соответствующие этому исходу. При такой интерпретации мы, по сути дела, имеем *статическую* игру в которой выигрыши определяются с помощью описанного только что алгоритма.

Рассмотрим, что такое стратегия на примере динамической игры, изображенной на Рис. 4.12(а). Игрок 1 в этой игре принимает реше-

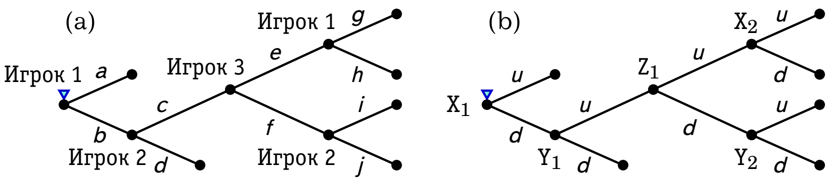


Рис. 4.12. Два дерева игры

ния в двух вершинах, в каждой из которых выбирает из двух действий. Таким образом, всего Игрок 1 имеет $2 \times 2 = 4$ стратегии, которые можно обозначить следующим образом (a, g), (a, h), (b, g) и (b, h). Более кратко можем записать ag, ah, bg, bh. Аналогично, у Игрока 2 имеется четыре стратегии: ci, cj, di, dj. Игрок 3 принимает решение только в одной вершины и имеет всего две стратегии: e и f.

Если Игрок 1 выберет a, то он уже не будет выбирать между g и h. Таким образом, определение стратегии в определенном смысле избыточно. То же верно для стратегии Игрока 2. Можно избавится от этой избыточности, взяв в качестве стратегий Игрока 1 a, bg и bh, а в качестве стратегий Игрока 2 — d, ci и cj.

Часто при записи стратегий в играх с конечным числом вершин удобно бывает присвоить каждой вершине однозначную метку (можно просто номер) и обозначать стратегии при помощи этих меток. Например, в игре, дерево которой показано на Рис. 4.12(b), имеется три игрока, X, Y и Z. (По структуре это дерево в точности такое же, как на Рис. 4.12(a).) Вершины обозначены названием игрока с нижним индексом. Хотя в данном примере действия в разных вершинах имеют одинаковые названия, но неоднозначностей не возникает. У игрока X имеются стратегии (X_1:u, X_2:u), (X_1:u, X_2:d), (X_1:d, X_2:u), (X_1:d, X_2:d). У игрока Y имеются стратегии (Y_1:u, Y_2:u), (Y_1:u, Y_2:d), (Y_1:d, Y_2:u), (Y_1:d, Y_2:d). Две стратегии игрока Z можно обозначить просто u и d или несколько более громоздко Z_1:d и Z_1:u.

На Рис. 4.13 отмечены ветви, соответствующие следующему профилю стратегий трех игроков: (X_1:d, X_2:d), (Y_1:u, Y_2:u) и Z_1:d. Видно, что данный профиль стратегий задает однозначно траекторию игры. Траектория идет из начальной вершины по отмеченным ветвям дерева, следующим друг за другом. Та конечная вершина, в которую приводит траектория игры, отмечена звездочкой. По описанной схеме мы можем каждому профилю стратегий сопоставить одну из ко-

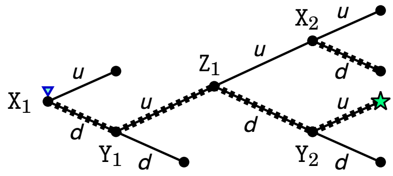


Рис. 4.13. Конечная вершина, соответствующая стратегиям (X_1:d, X_2:d), (Y_1:u, Y_2:u) и Z_1:d

нечных вершин, исход игры и вектор выигрышей.

Теперь мы разберем, как на основе развернутой формы динамической игры получить ее нормальную форму, на примере динамического варианта Игры 8 «Выбор компьютера» (с. 55). Предположим, что первый игрок выбирает себе компьютер первым. Дерево такой игры представлено на Рис. 4.14.

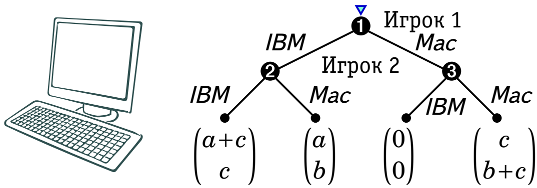


Рис. 4.14. Динамический вариант игры «Выбор компьютера»

Вершины на дереве пронумерованы для удобства обозначения стратегий. Игрок 1 имеет в этой игре две стратегии, совпадающие с действиями в вершине ❶. Эти стратегии можно обозначить ❶ IBM и ❶ Mac. Игрок 2 имеет $2 \times 2 = 4$ стратегии. Каждая его стратегия определяет действия в двух вершинах: ❷ и ❸. Таким образом, второй игрок имеет следующие стратегии: (❷ IBM, ❸ IBM), (❷ IBM, ❸ Mac), (❷ Mac, ❸ IBM), (❷ Mac, ❸ Mac). План, соответствующий, например, второй из указанный стратегий, второй игрок формулирует следующим образом: я выберу IBM, если первый игрок выберет IBM и Mac, если первый игрок выберет Mac.

В Таблице 4.3 представлена та же игра в нормальной форме. Способ заполнения матрицы следующий. Если, к примеру, первый игрок выберет стратегию ❶ Mac, а второй — стратегию (❷ Mac, ❸ IBM), то

Таблица 4.3. Нормальная форма динамического варианта игры «Выбор компьютера»

		Игрок 2			
		❷ *IBM* ❸ *IBM*	❷ *IBM* ❸ *Mac*	❷ *Mac* ❸ *IBM*	❷ *Mac* ❸ *Mac*
Игрок 1	❶ *IBM*	$\underline{a+c}$; $\underline{c}$	$\underline{a+c}$; $\underline{c}$	$\underline{a}$; b	a; b
	❶ *Mac*	0; 0	c; $\underline{b+c}$	0; 0	$\underline{c}$; $\underline{b+c}$

первый игрок выберет Mac, а второй, видя это, в соответствии со своей стратегией выберет IBM (его стратегия предусматривает выбор IBM в ответ на Mac). Данному профилю стратегий соответствуют выигрыши (0;0).

Можно заметить, что нормальная форма динамического варианта игры более сложна, чем нормальная форма статического варианта игры (см. Таблицу 2.1). В игре с тремя типами компьютеров у второго игрока было бы уже 9 стратегий. Еще более сложна нормальная форма динамической игры, в которой у игроков бесконечное множество стратегий.

4.6.2. Равновесие Нэша и совершенное в подыграх равновесие Нэша

Для нормальной формы игры естественным решением, как мы уже видели, является равновесие Нэша. Рассмотрим, какие решения дает концепция равновесия Нэша в динамических играх на примере динамического варианта Игры 8 «Выбор компьютера». Возьмем содержательно наиболее интересный случай, когда $a < c$ и $b < c$ (оба игрока сильно ценят совместимость).

Сначала разберем, что предсказывает обратная индукция. При сделанных предположениях о параметрах игры можно предсказать, что второй игрок в вершине ❷ (см. Рис. 4.14) выберет IBM, поскольку $c < b$ (он совместимость ценит больше, чем использование компьютера любимого типа), а в вершине ❸ выберет Макинтош, поскольку $b + c > 0$. В «свернутой» игре первый игрок должен сделать выбор между выигрышами $a + c$ (IBM) и c (Макинтош). Он выберет IBM. Таким образом, обратная индукция предсказывает, что игроки выберут следующие стратегии:

первый — ❶ IBM,
второй — (❷ IBM, ❸ Mac).

В Таблице 4.3 подчеркнуты оптимальные отклики игроков на стратегии, выбранные партнером. Из таблицы видно, что в рассматриваемой игре есть три равновесия Нэша. Только одно из этих равновесий совпадает с решением, полученным обратной индукцией. Указанная ситуация является типичной, т. е. решение, полученное методом обратной индукции, всегда является равновесием по Нэшу, что показывает следующая теорема.

Вообще говоря, не любое равновесие по Нэшу можно получить методом обратной индукции, что видно из рассматриваемого примера. Важно понять, почему это так.

Рассмотрим, например, равновесие ❶ Mac и (❷ Mac, ❸ Mac) (Рис. 4.14, с. 154). Содержательно его можно интерпретировать следующим образом: второй игрок угрожает первому игроку тем, что он выберет Макинтош в случае, если тот выберет IBM; под влиянием этой угрозы первый игрок выбирает Макинтош. Но такая ситуация противоречит предположению о рациональности, на которое опирается метод обратной индукции. Действительно, если второй игрок окажется в точке ❷, то предпочтет выбрать IBM. Поскольку первый игрок знает о том, что второй игрок рационален, он не поверит этой (пустой) угрозе. Таким образом, рассматриваемый набор стратегий вряд ли является естественным решением игры. Другое «добавочное» равновесие, ❶ IBM и (❷ IBM, ❸ IBM), не имеет столь же интересной интерпретации, но вызывает аналогичные подозрения по поводу своей обоснованности (второму игроку не имеет никакого смысла выбирать IBM в ответ на выбор Mac первым игроком).

Таким образом, можно сказать, что равновесия по Нэшу, которые не могут быть получены методом обратной индукции, не совместимы в данном случае с гипотезой рациональности и оказываются «лишними». Это типичная ситуация в динамических играх. Как ее можно объяснить? Сделаем по этому поводу два замечания.

- При представлении динамической игры в нормальной форме теряется информация о последовательности ходов и информации, доступной игрокам на каждом ходе[3].

[3]В дальнейшем мы увидим, как из нормальной формы получить развернутую форму. При двойном преобразовании получается, что полученная развернутая форма не совпадает с исходной развернутой формой.

- Сам способ записи динамической игры в нормальной форме, как он описан выше, заключает в себе предположение, что игроки выбирают свои стратегии до начала игры *раз и навсегда* и уже не меняют их в дальнейшем в ходе игры.

Напрашивается вывод, что концепция равновесия по Нэшу в случае динамических игр, вообще говоря, не дает удовлетворительного прогноза исхода игры и поэтому ее требуется каким-то образом усилить. Укажем способ такого усиления[4].

Предположим, что несколько ходов в игре уже сделано. Можно рассматривать оставшуюся часть игры как самостоятельную игру. Выбранные игроками стратегии предписывают, что в этой оставшейся части игры игроки будут действовать строго определенным образом. Однако такое поведение может оказаться невыгодно игрокам — они могут предпочесть изменить свои выборы. С этой точки зрения естественным представляется требование динамической согласованности.

> *Равновесные стратегии должны быть такими, чтобы ни у одного из игроков не было стимула менять их в процессе игры.*

Часть игры, начинающаяся в некоторой вершине и включающая в себя все, что следует за этой вершиной, в теории игр называют **подыгрой**. (Это определение подходит только для игр с совершенной информацией, которые мы сейчас рассматриваем.)

> Подыгра игры с совершенной информацией в развернутой форме, — это игра, построенная на основе исходной игры. Начальной вершиной подыгры служит одна из вершин исходной игры (кроме конечных). В подыгру входят все вершины, следующие за ее начальной вершиной. Выигрыши в подыгре совпадают с выигрышами в соответствующих конечных вершинах полной игры.

Согласно приведенному определению, исходная игра является подыгрой самой себя.

> **Собственная (истинная) подыгра** — это подыгра, начальная вершина которой не совпадает с начальной вершиной полной игры.

---

[4]По-английски процесс избавления от «лишних» равновесий называют *refinement* — усовершенствование, уточнение. Особенно много способов подобного уточнения равновесий предложено для динамических игр с несовершенной и/или неполной информацией, о которых пойдет речь ниже.

В рассматриваемой игре есть три подыгры, одна из них — сама игра и две собственных подыгры, начинающиеся в вершинах ❷ и ❸.

> Подсчитайте количество подыгр в Игре 35 и в Игре 37 при $N = 4$. **?**

Основываясь на требовании динамической согласованности, можно ввести концепцию равновесия, которая усилила бы концепцию Нэша.

Совершенным в подыграх равновесием[5] называется профиль стратегий, такой что он является равновесием Нэша в полной игре, а соответствующие части этого профиля являются равновесиями по Нэшу во всех собственных подыграх этой игры.

Приложим данное определение к динамической игре «Выбор компьютера» (Рис. 4.14 на с. 154). Представим подыгру, начинающуюся в вершине ❷ в нормальной форме. Игрок 1 не осуществляет в этой подыгре выбора. Игрок 2 имеет две стратегии: ❷ IBM и ❷ Mac. Матрица игры представлена в Таблице 4.4.

Таблица 4.4. Одна из подыгр в динамической игре «Выбор компьютера»

	Игрок 2: ❷ *IBM*	Игрок 2: ❷ *Mac*
Игрок 1	$\underline{a+c}$, $\underline{c}$	$\underline{a}$, b

В данной игре есть единственное равновесие Нэша. В нем второй игрок выбирает IBM. Таким образом, чтобы равновесие Нэша в исходной игре было совершенным, требуется, чтобы оно предписывало в вершине ❷ выбор IBM. Набор стратегий ❶ Mac и (❷ Mac, ❸ Mac) не удовлетворяет этому требованию, поэтому он не может быть совершенным в подыграх равновесием.

Во второй собственной подыгре, которая начинается в вершине ❸, в равновесии Нэша второй игрок выбирает Макинтош. Поэтому набор стратегий ❶ IBM и (❷ IBM, ❸ IBM) не является совершенным в подыграх равновесием.

С другой стороны, набор ❶ IBM и (❷ IBM, ❸ Mac) является равновесием по Нэшу в полной игре и соответствует равновесиям по Нэшу в каждой из собственных подыгр. Поэтому данный набор стратегий

[5] Концепцию совершенного в подыграх равновесия предложил Рейнхард Зельтен.

является совершенным в подыграх равновесием. Видим, что он совпал с тем решением, которое мы раньше получили, применив обратную индукцию. Это совпадение не является случайным.

> В игре с совершенной информацией (с конечным числом ходов) любое решение, полученное методом обратной индукции, является равновесием по Нэшу.

Поскольку решение по обратной индукции по смыслу является решением по обратной индукции в каждой подыгре, то следовательно любое решение по обратной индукции является совершенным в подыграх равновесием. Обратное тоже верно: любое совершенное в подыграх равновесие является решением по обратной индукции.

> В игре с совершенной информацией (с конечным числом ходов) множество решений, получаемых обратной индукцией, совпадает с множеством совершенных в подыграх равновесий.

Нормальная форма игры может быть очень громоздкой. Использование приведенной только что теоремы позволяет сильно упростить поиск совершенных в подыграх равновесий, поскольку не требуется записывать игры в нормальной форме и находить в них равновесия Нэша.

Например в игре «Рэкет», рассмотренной выше, стратегия фирмы должна указывать, как именно фирма будет реагировать на каждый из возможных уровней α, т. е. функцию $y(\alpha)$. Поэтому процесс поиска равновесия по Нэшу по существу включает максимизацию по всем возможным функциям $y(\cdot)$. Использование обратной индукции позволяет упростить эту задачу.

Следует отметить, что многие игры являются довольно сложными, и, даже применяя обратную индукцию, равновесие в них найти сложно. Характерным примером является игра в шахматы. Поскольку это конечная игра с совершенной информацией, то в ней должно существовать по крайней мере одно решение, получаемое обратной индукцией, и, соответственно, совершенное в подыграх равновесие. Тот факт, что в шахматах существует некоторое определенное решение, известен уже давно[6], однако найти такое решение в настоящее время не представляется возможным даже с применением компьютера. Понятно, что если игроки обладают ограниченными способностями, то совершенное в подыграх равновесие может быть не очень

[6] Эрнст Цермело доказал в начале XX века, что либо белые могут обеспечить себе выигрыш (как бы ни играли черные), либо они не могут обеспечить себе выигрыш, но могут обеспечить ничью, либо черные могут обеспечить себе выигрыш.

реалистичным предсказанием результата игры, если игра достаточно сложна.

4.7. Некооперативный торг

Теперь мы рассмотрим важный класс некооперативных игр, моделирующих достижение соглашений между экономическими субъектами, — так называемые игры торга.

Выше мы уже рассматривали проблему торга с точки зрения теории кооперативных игр. В теории кооперативных игр переговоры между игроками остаются за кадром и не входит в описание игры. Из-за этого оказывается, что либо предсказываемый исход существенно неоднозначен, либо исход предсказывается на основе не вполне убедительных априорных предположений.

Теперь мы рассмотрим торг с точки зрения некооперативной теории игр. При этом переговорный процесс моделируется в явном виде. В явном виде указываются возможные действия игроков на каждом этапе переговорного процесса.

Игра 40 («Торг»[7]): Два игрока (A и B) делят между собой некоторую сумму денег (или любое бесконечно делимое благо). Будем считать, что общее количество равно 1. Дележ можно задать долей $x \in [0;1]$ достающейся игроку A. Если игрок A получает x, то игрок B, соответственно, получает $1-x$. Торг происходит в несколько раундов. На каждом раунде один из игроков предлагает дележ x_j, где j — номер раунда. Другой игрок может либо отклонить, либо принять этот дележ. Если дележ принимается, то торг заканчивается и игроки получают свои доли $(x_j, 1-x_j)$. Если дележ отклоняется, то настает очередь другого игрока предложить свой дележ. Игрок A предлагает дележ в раундах с нечетными номерами, а игрок B — в раундах с четными номерами. Если за n раундов игроки не договорятся, то игра заканчивается и каждый игрок получает 0.

Предполагается, что игроки предпочитают получить деньги как можно раньше, поэтому полученная сумма денег умножается на дисконтирующий множитель, то есть если игроки договорятся на j-м раунде, то их выигрыши составят $\delta_A^{j-1} x_j$ и $\delta_B^{j-1}(1-x_j)$ соответственно, где $\delta_A, \delta_B \in (0,1)$ — дисконтирующие множители. ⊙

[7] См. [15].

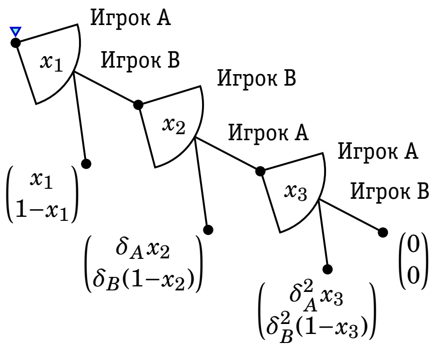


Рис. 4.15. Торг, три раунда

Рассмотрим эту игру при $n = 3$. На Рис. 4.15 показано дерево игры. Проанализируем эту игру, используя обратную индукцию. В последнем раунде игрок B заведомо примет предложение игрока A, если $\delta_B^2(1 - x_3) > 0$, т. е. если $x_3 < 1$. Если $x_3 = 1$, то игроку B все равно, принять или отклонить предложение. Игроку A выгодно назвать x_3 как можно бо́льшим. Значит, в равновесной стратегии не может быть $x_3 < 1$, ведь игрок A тогда мог бы немного увеличить x_3, не изменив выбора игрока B, и увеличил бы при этом свой выигрыш. Таким образом, в равновесии $x_3 = 1$. Чтобы при этом действительно было равновесие, игрок B должен в своей стратегии быть «благожелательным» по отношению к A, то есть принять его предложение; в противном случае игрок A мог бы предложить x_3 меньше 1 и увеличить при этом свой выигрыш.

Анализ третьего раунда показывает, что игрок A должен будет предложить $x_3 = 1$, а игрок B должен будет принять этот дележ. Мы можем теперь «свернуть» игру, заменив третий раунд на конечную вершину с выигрышами δ_A^2 и 0.

Во втором раунде игрок A выбирает между δ_A^2 (если отклоняет предложение) и $\delta_A x_2$ (если принимает). Таким образом, если $x_2 > \delta_A$, то он примет предложенный дележ, а если $x_2 < \delta_A$, то отклонит. При $x_2 = \delta_A$ игроку A все равно, какой выбор сделать. Игрок B предпочтет получить выигрыш $\delta_B(1-x_2)$, а не 0, поэтому он не станет предлагать $x_2 < \delta_A$. С другой стороны любой дележ $x_2 > \delta_A$ не является равновесным, поскольку игрок B в этом случае может уменьшить x_2, не меняя выбора игрока A, и, тем самым, увеличить свой выигрыш. Таким образом, в равновесии $x_2 = \delta_A$. Чтобы этот выбор был равновесным, требуется, чтобы в равновесии игрок A принял дележ $x_2 = \delta_A$, несмотря на то, что отказ от этого дележа должен принести ему такой же выигрыш.

Остается торг, состоящий из одного раунда, в котором игроки получат δ_A^2 и $\delta_B(1-\delta_A)$, если не придут к соглашению (см. Рис. 4.16). Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что уже в первом раунде игроки придут к соглашению: игрок B примет дележ $x_1 = 1-\delta_B(1-\delta_A)$, предложенный игроком A. Выигрыши при этом составят $1-\delta_B(1-\delta_A)$ и $\delta_B(1-\delta_A)$.

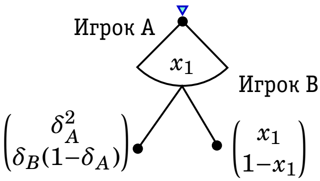


Рис. 4.16. Свернутая игра «Торг», первый раунд

Об описанном торге с поочередными предложениями в условиях полной информации можно сделать два замечания:

- *торг заканчивается на первом раунде*;
- *равновесный исход Парето-оптимален.*

Рис. 4.17 показывает графический способ нахождения равновесия в игре «Торг» при $n = 3$. На этом графике видно, как изменяется граница Парето от раунда к раунду, сжимаясь в сторону начала координат из-за дисконтирования. Процесс нахождения решения изображен толстой кривой, выходящей из начала координат.

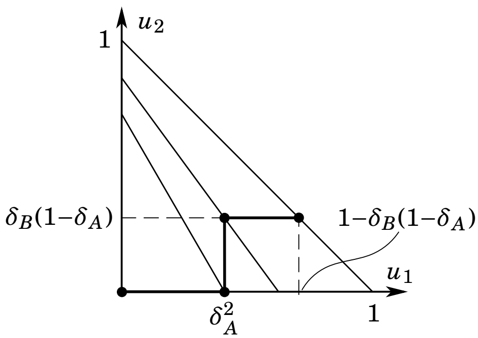


Рис. 4.17. Равновесие в игре «Торг»

Глава 5

Динамические игры с несовершенной информацией

Моделирование одновременных ходов в развернутой форме игры. Информационные множества. Игры с идеальной памятью. Игры с почти совершенной информацией. Сравнение смешанных и поведенческих стратегий. Повторяющиеся статические игры. Сотрудничество в повторяющихся играх.

5.1. Введение

Каждой вершине в развернутой форме игры соответствует единственная **предыстория** — то есть последовательность действий, которая приводит из начальной вершины в данную вершину. Особенностью рассматриваемых в предыдущей главе игр с совершенной информацией является то, что каждый игрок перед тем, как сделать ход, полностью знает предысторию игры — действия, выбранные ранее им и другими игроками. Другими словами, игрок знает, в какой вершине дерева он оказался. В этом разделе мы рассмотрим класс игр, называемых **играми с несовершенной информацией**, в которых игроки могут не знать полностью предысторию игры.

Чтобы отобразить ограниченность информации на дереве игры, используют так называемые **информационные множества**. Информационное множество отображает тот факт, что игрок не знает, в какой вершине дерева находится (т. е. не знает точно, какова была предыстория игры). Если игрок не может отличить две вершины дерева, то они принадлежат одному и тому же информационному множеству. Используя понятие информационного множества, мы можем дать формальное определение игр с совершенной (и полной) информацией: в играх с совершенной информацией в каждом информационном множестве находится только одна вершина.

Примером игры с несовершенной информацией служит любая статическая игра. Ее можно искусственно «динамизировать», задав произвольным образом порядок ходов и определив подходящим образом информационные множества. Предположим, что первый игрок ходит первым, второй — вторым. Есть две вершины, в которых ход принадлежит второму игроку, однако сам он не может различить, выбирая свои действия, в какой вершине он находится; другими словами, эти две вершины находятся в одном и том же информационном множестве.

Игра 41 («Чёт или нечет»): Первый игрок загадывает чет или нечет, а второй отгадывает. Если угадал, то он получает 1, а первый −1, если не угадал, то наоборот. (См. матрицу игры в Таблице 5.1.) ⊙

Таблица 5.1. Выигрыши Игры 41 «Чет или нечет»

		Игрок 2	
		чет	*нечет*
Игрок 1	*чет*	-1, 1	1, -1
	нечет	1, -1	-1, 1

Игру 41 можно рассматривать как статическую или как динамическую игру. Если эта игра рассматривается как динамическая, то следует учесть, что когда Игрок 2 делает ход, он не знает, что выбрал Игрок 2. Таким образом, следует две вершины, в которых делает ход Игрок 2, объединить информационным множеством, как это показано на Рис. 5.1.

По сравнению с развернутой формой игр с совершенной (и полной) информацией, в развернутой форме игр с несовершенной информацией появляется еще один элемент — информационное множество. Какие требования накладываются на дерево игры, содержа-

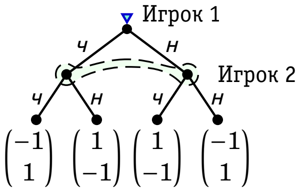


Рис. 5.1. Дерево Игры 41 «Чет или нечет»

щее информационные множества с более чем одной вершиной? Во-первых, каждая вершина дерева игры (кроме конечных) должна принадлежать одному и только одному информационному множеству. Во-вторых, по смыслу определения информационного множества, в каждой вершине информационного множества ход должен принадлежать одному и тому же игроку. В-третьих, множества возможных действий во всех вершинах одного и того же информационного множества должны быть одинаковыми (в противном случае игрок мог бы по тому, какие альтернативы ему доступны, определить, в какой именно вершине он находится).

Посмотрим на дерево игры, представленное на Рис. 5.1. Это дерево содержит два информационных множества. В первом информационном множестве ход принадлежит Игроку 1. Это информационное множество содержит только одну вершину — начальную. Во втором информационном множестве ход принадлежит Игроку 2. Это информационное множество содержит две вершины, следующие за начальной. В первую из вершин Игрок 2 попадает, если Игрок 1 выбирает *ч*, а во вторую — если Игрок 1 выбирает *н*. Поскольку Игрок 2 не знает, что именно выбрал Игрок 1, то эти две вершины должны содержаться в одном и том же информационном множестве. Далее, во втором информационном множестве в обеих вершинах Игрок 2 выбирает из вариантов *ч* и *н*. То есть, как и требуется, в пределах одного и того же информационного множества возможные действия одни и те же.

Еще один вид требований к дереву игры появляется, если предположить, что игроки не забывают ту информацию, которой они обладают. Это так называемые **игры с идеальной памятью**. Игра в развернутой форме называется игрой с идеальной памятью, если игроки всегда помнят то, что они ранее знали, и то, что они ранее делали. Мы не будем давать формального определения таких игр. Приведем только примеры игр, в которых предположение об идеальной памяти не выполняется (см. Рис. 5.2).

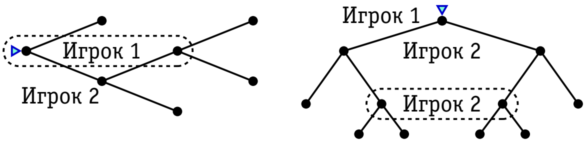


Рис. 5.2. Примеры игр, не являющихся играми с идеальной памятью

5.2. Нормальная форма динамической игры с несовершенной информацией

5.2.1. Соответствие между нормальной и развернутой формой игры

Как мы знаем, существуют два представления любой игры — представление в нормальной и развернутой форме. Каковы соотношения между ними?

Сначала мы рассмотрим, что такое нормальная (стратегическая) форма игры с несовершенной информацией. Для этого надо понять, что такое стратегия в такой игре.

Как обычно, стратегия — это полный план действий. Но нужно учесть, что когда игрок должен сделать ход, он может исходить только из того, что находится в данном информационном множестве, но не имеет возможности выбирать действие в зависимости от того, в какой именно вершине он находится, поскольку не различает вершины в пределах информационного множества.

Таким образом, в данном случае стратегия игрока должна указывать, какие тот выберет действия, если окажется в том или ином своем информационном множестве. (В играх с совершенной информацией в каждом из информационных множеств находится только одна вершина, поэтому такая модификация определения стратегии полностью согласуется с данным ранее определением.)

Зная определение стратегии, мы можем динамическую игру представить в нормальной форме. Далее мы можем игру в нормальной форме рассматривать как статическую и представить такую статическую игру в развернутой форме. Так мы можем осуществить перевод игры из развернутой формы в нормальную, а затем из нормальной опять в развернутую.

Рассмотрим на примере[1], как влияет подобный двойной перевод на развернутую форму игры.

Игра 42: Рита должна решить, получат ли они с Колей одинаковые выигрыши — а именно, каждый 10 — или же она получит в 10 раз больше, а Костя — в 10 раз меньше. Если Рита предложит несправедливый вариант, то Костя может наказать Риту, сделав так, что выигрыши обоих станут нулевыми (конечно, он и сам от этого пострадает). ⊙

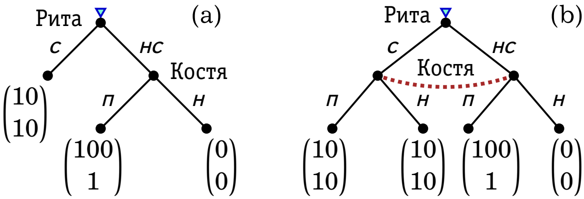


Рис. 5.3. (a) Исходное дерево Игры 42; (b) дерево игры после «двойного перевода»

Дерево этой игры показано на Рис. 5.3(a). Здесь *с* — «справедливый вариант», *нс* — «несправедливый вариант», *п* — «принять предложенный вариант», *н* — «наказать». Если мы представим игру в нормальной форме, то получим Таблицу 5.2.

Таблица 5.2. Нормальная форма Игры 42

		Костя: *п*	Костя: *н*
Рита	*с*	10, 10	10, 10
	нс	100, 1	0, 0

Этой нормальной форме соответствует дерево игры, представленное на Рис. 5.3(b). (На рисунке информационное множество представлено жирной пунктирной линией.) Как видим, при таком «двойном переводе» частично потеряна информация о структуре игры и мы получили другую игру в развернутой форме.

[1] Данный пример похож на пример, который Роберт Ауман привел в своей нобелевской лекции.

Очевидно, что принципиально разным играм может соответствовать одна и та же нормальная форма. Это объясняется тем, что нормальная форма игры не является в общем случае адекватной для описания динамических игр. С помощью нее можно представлять корректно только статические игры. Если операцию «двойного перевода» из развернутой формы в нормальную и обратно осуществить с любой статической игрой (например, с Игрой 41, представленной деревом на Рис. 5.1), то дерево игры не поменяется (с точностью до выбора порядка ходов, что в данном случае несущественно). Использование нормальной формы для представления статических игр вполне допустимо и даже предпочтительно, так как она более компактна.

Рассмотрите модифицированную Игру 42, в которой Костя имеет возможность наказать Риту и в том случае, если она выберет справедливый вариант. Получите нормальную форму игры, а затем постройте по нормальной форме развернутую.

?

5.2.2. Подыгры и совершенное в подыграх равновесие

Пользуясь нормальной формой, мы можем распространить концепцию равновесия Нэша на динамические игры с несовершенной информацией. Определение ничем не будет отличаться от ранее данного.

Определение совершенного в подыграх равновесия Нэша в играх с несовершенной информацией совпадает с данным выше определением для игр с совершенной информацией. Однако, в играх с несовершенной информацией следует дать несколько другое определение подыгры.

Что такое подыгра в данном случае? Это вершина и все, что следует за ней. Отличие состоит в том, что подыгра может начинаться не из любой вершины. Нельзя подыгрой разрывать информационные множества.

На Рис. 5.4 изображена игра, в которой нет собственных (истинных) подыгр. Это связано с тем, что если начать подыгру из любой вершины, кроме начальной, то она разорвет информационное множество Игрока 3, а это недопустимо.

В играх с несовершенной информацией «неподходящие» равновесия могут возникать так же точно, как «неподходящие» равновесия

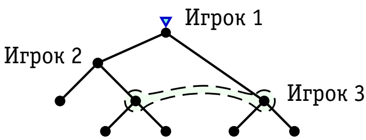


Рис. 5.4. Игра, в которой нет подыгр кроме всей игры в целом

Нэша возникают в играх с совершенной и полной информацией, такие как не заслуживающие доверия обещания и угрозы. В некоторых играх такие равновесия можно исключить в играх с несовершенной (и полной) информацией с применением совершенного в подыграх равновесия.

Игра 43: Фирма 1 решает, войти ли в отрасль, где Фирма 2 является монополией. Если Фирма 1 не войдет, то Фирма 2 будет продолжать получать монопольную прибыль. Если Фирма 1 решит войти, то каждая из двух фирм может вести себя либо агрессивно (например, назначая низкую цену на продукцию), либо мирно. Каждой из фирм не выгодно вести себя агрессивно, как бы ни вела себя конкурирующая фирма. При мирном поведении обеих фирм Фирме 1 выгодно войти в отрасль, поскольку она получит довольно высокую олигопольную прибыль. При агрессивном поведении хотя бы одной из фирм Фирме 1 не выгодно входить. Фирме 2 не выгодно, чтобы Фирма 1 входила, поскольку тогда она перестанет быть монополией и ее прибыль упадет. ⊙

На Рис. 5.5 изображено дерево данной игры с подходящими под описание выигрышами. На дереве *н* означает «не входить», *в* — «войти», *а* — вести себя агрессивно, *м* — вести себя мирно.

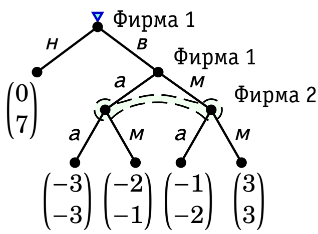


Рис. 5.5. Дерево игры Игры 43

У Фирмы 1 имеется четыре стратегии: *на*, *нм*, *ва* и *вм*. Нормальная форма игры представлена в Таблице 5.3. Оптимальные отклики указаны подчеркиванием выигрышей. Видно, что здесь имеется три равновесия Нэша.

Таблица 5.3. Нормальная форма Игры 43, соответствующая дереву, показанному на Рис. 5.5

Фирма 1 \ Фирма 2	*а*	*м*
на	$\underline{0}$, $\underline{7}$	0, $\underline{7}$
нм	$\underline{0}$, $\underline{7}$	0, $\underline{7}$
ва	-3, -3	-2, $\underline{-1}$
вм	-1, -2	$\underline{3}$, $\underline{3}$

Два из трех равновесий не являются совершенными в подыграх. Действительно, данная подыгра уже представляет собой статическую игру, в которой каждый игрок имеет два действия. Матрица такой игры показана в Таблице 43. В данной подыгре обе фирмы выбирают *м* (это строго доминирующая стратегия).

Таблица 5.4. Подыгра в Игре 43

Фирма 1 \ Фирма 2	*а*	*м*
а	-3, -3	-2, $\underline{-1}$
м	$\underline{-1}$, -2	$\underline{3}$, $\underline{3}$

Равновесия (*на*, *а*) и (*нм*, *а*) не являются совершенными в подыграх, поскольку профили стратегий (*а*, *а*) и (*м*, *а*) не являются равновесиями в подыгре из Таблицы 5.4.

Концепция совершенного в подыграх равновесия не всегда может «работать на полную мощность» в отношении игр с несовершенной информацией, поскольку такие игры содержат информационные множества, состоящие более чем из одной вершины, в то время как подыгра должна содержать информационное множество целиком, так что порой имеется единственная подыгра — это вся игра в целом, так что любое равновесие Нэша является совершенным в подыграх. Даже если игра имеет более одной подыгры, неспособность концепции совершенных в подыграх равновесий «резать» информационные множества может привести к тому, что неподходящие равновесия не будут исключены.

5.3. Обратная индукция и игры с почти совершенной информацией

Заметим, что не к любой игре с несовершенной информацией можно применить алгоритм обратной индукции. Игра на Рис. 5.4 представляет собой как раз такую игру, в которой невозможно найти решение с помощью обратной индукции. Игрок 3 в этой игре не знает, в какой именно из двух вершин информационного множества он находится, поэтому он не может без каких-либо дополнительных предположений выбрать между двумя имеющимися альтернативами. (Конечно, мы могли бы применить к этой игре концепцию равновесия Нэша и условиться, что это и есть применение обратной индукции, но результат не будет таким же интуитивно убедительным, как в случае игр с совершенной информацией.) Мы рассмотрим концепцию решения подобных игр позже, в параграфе, посвященном совершенному байесовскому равновесию.

Но существует класс игр, для анализа которых можно использовать (при естественной его модификации) алгоритм обратной индукции. Эти игры можно назвать **играми с почти совершенной информацией**. Другое название — многоэтапные игры с наблюдаемыми действиями.

Игру с почти совершенной информацией можно разбить на несколько этапов, $t = 1, \ldots, T$. Каждый этап, фактически, представляет собой набор статических игр с одновременным выбором действий. В рамках любого этапа t каждый из игроков знает всю предысторию (все действия, выбранные на предыдущих этапах $1, \ldots, t-1$), более того, эта предыстория *общеизвестна*.

Заметим, что множества стратегий некоторых игроков в статических играх, составляющих игру с почти совершенной информацией, могут быть пустыми (как, например, на первом этапе Игры 43, дерево которой представлено на Рис. 5.5).

В этих играх каждая конечная вершина некоторого этапа начинает подыгру. Поэтому в данном случае хорошо работает обратная индукция и концепция совершенного в подыграх равновесия. Множество решений по обратной индукции совпадает с множеством совершенных в подыграх равновесий.

Сначала при использовании обратной индукции на последнем, T-м, этапе находятся равновесия по Нэшу всех игр этого этапа. Затем каждая их этих игр заменяется конечной вершиной. Ей сопоставляются выигрыши, соответствующие равновесию по Нэшу (одному из равновесий, если их несколько). Тем самым мы получаем игру с $T-1$ этапом, и т. д.

Игры с почти полной информацией удобны для анализа, поскольку каждая статическая игра (соответствующего этапа) начинает одну из подыгр. Этапы можно рассматривать последовательно, а это, фактически, и означает, что в них не возникает трудностей с использованием обратной индукции.

Рассмотрим пример игры с почти полной информацией и использования обратной индукции для поиска решения в таких играх.

Игра 44 («Набеги на банки»): Два инвестора вложили в банк одинаковые денежные суммы (например, по 2 рубля). Банк обещает им вернуть через 3 месяца по 3 рубля. Они могут взять деньги из банка через 1, 2 или 3 месяца, однако банк сможет вернуть только половину общей суммы сделанных инвестиций, если вкладчики потребуют деньги раньше срока (через 1 или 2 месяца). При этом если оба потребуют деньги, то получат по 1 рублю, а если деньги потребует только один, то он получит 2 рубля, а другой вкладчик не сможет получить ничего. ⊙

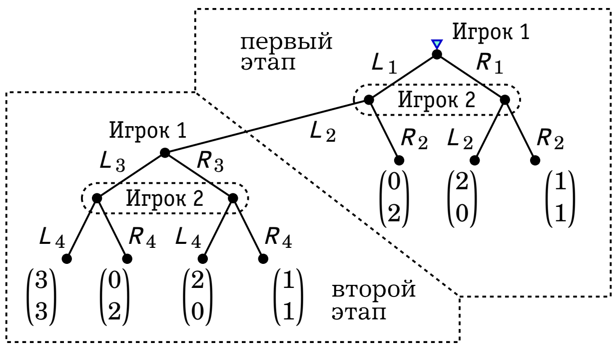


Рис. 5.6. Дерево игры «Набеги на банки»

Дерево игры показано на Рис. 5.6. R обозначает «забрать деньги», L — «не забирать». Игра происходит в два этапа, на каждом из которых вкладчики одновременно решают, забирать ли деньги. Первый этап происходит по прошествии одного месяца после вложения денег, второй — по прошествии двух месяцев.

В Таблице 5.5(a) изображена статическая игра, соответствующая второму этапу. В игре имеется два равновесия по Нэшу. Применяя обратную индукцию, мы используем выигрыши, соответствующие этим равновесиям, чтобы сформулировать статическую игру, соответствующую первому этапу. Получающаяся «свернутая» игра представлена в Таблице 5.5(b). В ней выигрыши второго этапа обозначены через v_1 и v_2 соответственно.

Таблица 5.5. (a) Игра «Набеги на банки» на втором этапе; (b) «свернутая» игра «Набеги на банки» на первом этапе

(a)

Игрок 1 \ Игрок 2	L_4	R_4
L_3	$\underline{3}$, $\underline{3}$	0, 2
R_3	2, 0	$\underline{1}$, $\underline{1}$

(b)

Игрок 1 \ Игрок 2	L_2	R_2
L_1	v_1, v_2	0, 2
R_1	2, 0	1, 1

Множество равновесий Нэша в игре первого этапа зависит от того, какое из двух равновесий может реализоваться на втором этапе. Если игроки считают, что на втором этапе они оба заберут деньги, то им выгоднее забрать деньги на первом этапе, поскольку $v_1 = v_2 = 1 < 2$. Если же игроки считают, что на втором этапе они оба оставят деньги в банке, то на первом этапе может реализоваться одно из двух равновесий Нэша, поскольку $v_1 = v_2 = 3 > 2$: либо оба игрока забирают деньги, либо оба оставляют. Таким образом, обратная индукция дает три решения. В двух из этих решений происходит «набег на банк» на первом и втором этапе соответственно. Третье решение соответствует случаю, когда оба вкладчика дожидаются получения максимального выигрыша (3;3).

Использование обратной индукции в играх с почти совершенной информацией можно дополнительно обосновать тем, что для них (по аналогии с играми с совершенной информацией) выполнено следующее.

В игре с почти совершенной информацией (и конечным числом ходов) множество решений, получаемых обратной индукцией, совпадает с множеством совершенных в подыграх равновесий.

5.4. Повторяющиеся игры. Сотрудничество в повторяющихся играх

Характерный пример игры с почти совершенной информацией — повторяющаяся конечное число раз статическая игра. Под **повторяющейся игрой** понимают такую динамическую игру, которая является последовательным повторением некоторой исходной игры (неважно, статической или динамической). Чтобы получить дерево дважды повторяющейся игры, следует к каждой конечной вершине исходной игры «прикрепить» дерево исходной игры. Рис. 5.7 показывает как это сделать на примере Игры 17 «Ценовая конкуренция двух фирм» (с. 93).

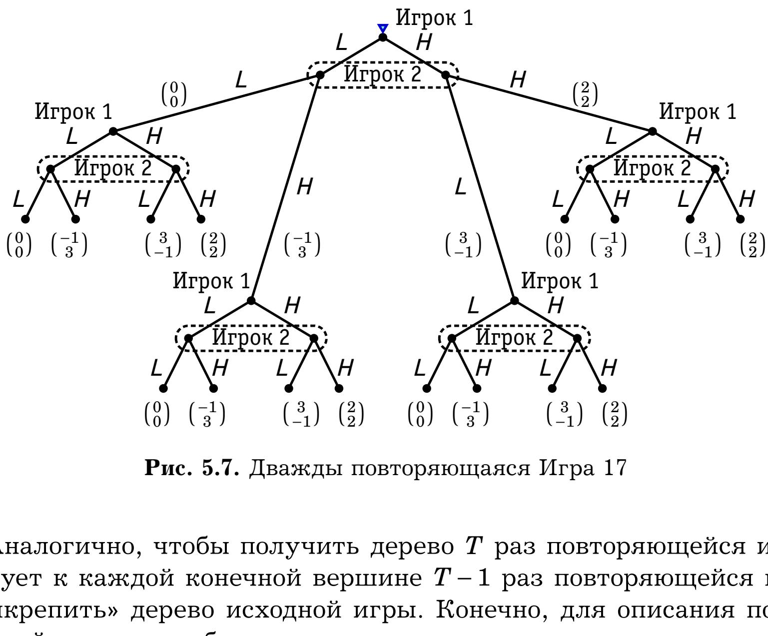


Рис. 5.7. Дважды повторяющаяся Игра 17

Аналогично, чтобы получить дерево T раз повторяющейся игры, следует к каждой конечной вершине $T-1$ раз повторяющейся игры «прикрепить» дерево исходной игры. Конечно, для описания повторяющейся игры не обязательно задавать все дерево игры, достаточно указать исходную игру и сколько раз она повторяется. В отличие от обычных игр, в повторяющихся играх принято сопоставлять выигрыши не только конечным вершинам, но и тем промежуточным, которые соответствуют конечным вершинам исходной игры. Общий выигрыш рассчитывается суммированием выигрышей в вершинах, лежащих на траектории игры. Таким образом, если u_{it} — выигрыш, полученный i-м игроком в результате t-го повторения игры (на t-м «раунде»), то общий выигрыш в T раз повторяющейся игре составит

$$u_i = \sum_{t=1}^{T} u_{it}.$$

Часто в повторяющихся играх выигрыши дисконтируют, что отражает тот факт, что игроки больше предпочитают получить выигрыш сейчас, а не в будущем. Другими словами, пусть $\delta_i \in (0;1)$ — дисконтирующий множитель i-го игрока. Тогда общий выигрыш рассчитывается по формуле

$$u_i = \sum_{t=1}^{T} \delta_i^{t-1} u_{it}.$$

Поскольку повторяющиеся игры являются разновидностью игр с почти совершенной информацией, совершенные в подыграх равновесия в них можно находить обратной индукцией.

Проанализируем повторяющуюся Игру 17. Используя обратную индукцию, рассмотрим последний раунд игры. Заметим, что все, что происходило в предыдущих раундах, влияет только на выигрыши, но не на множества стратегий. Однако влияние на выигрыши сводится только к тому, что ко всем выигрышам данного раунда добавляется одна и та же константа, определяемая предысторией игры. Таким образом, при анализе можно не принимать во внимание выигрыши предыдущих раундов. Тем самым все сводится к анализу однократно повторенной Игры 17, равновесие которой нам известно: каждая фирма назначит низкую цену.

Далее рассмотрим игры предпоследнего раунда, которые становятся играми последнего раунда в «свернутой» игре. «Свертывание» последнего раунда добавляет к выигрышам предпоследнего раунда одну и ту же константу (в нашем случае это 0 для обоих игроков). Предыстория игры тоже влияет только тем, что добавляет константу к выигрышам. Таким образом, опять с точностью до константы получаем исходную игру. Продолжая сворачивать игру, мы на всех раундах получим одно и то же решение, совпадающее с равновесием исходной игры. Таким образом, равновесная траектория будет представлять собой T раз повторенное равновесие однократной Игры 17.

В случае повторения игры можно было бы ожидать появления сотрудничества между игроками. Но в данном случае догадка о возникновении сотрудничества в повторяющейся игре не подтверждается. Это может быть связано с тем, что игроки знают, что игра закончится на T-м раунде. И в самом деле, если бы игра повторялась бесконечное число раз, то сотрудничество между игроками могло бы иметь место.

Мы ранее не вводили в рассмотрение бесконечные игры, однако их основные элементы можно определить по аналогии с конечными играми. Выигрыш в бесконечно повторяющейся игре рассчитывается по формуле[2]

$$u_i = \sum_{t=1}^{\infty} \delta_i^{t-1} u_{it}.$$

В отличие от игры с конечным числом повторений, в бесконечно повторяющейся Игре 17 (бесконечно длящейся конкуренции) возможно возникновение сотрудничества (так называемого молчаливого сговора по поводу высоких цен).

Рассмотрим стратегии следующего вида:

- назначать высокую цену, если на предыдущих ходах другой игрок назначал высокую цену (в том числе, в первом раунде тоже назначить высокую цену);
- назначать низкую цену, если хотя бы на одном из предыдущих раундов другой игрок назначил низкую цену.

Стратегия, согласно которой игрок выбирает какие-то одни действия, а после наступления определенного события до конца игры — некоторые другие действия, называется триггерной стратегией (стратегией с переключением).

Если дисконтирующие множители δ_1, δ_2 достаточно высоки, то указанные триггерные стратегии будут составлять совершенное в подыграх равновесие. Рассмотрим, при каких условиях игроку выгодно придерживаться триггерной стратегии, если его партнер также ее придерживается.

Поскольку после того как фирма назначила низкую цену (выбрала L), конкурирующая фирма во всей дальнейшей игре будет поступать таким же образом, то отказавшейся от сотрудничества фирме будет выгодно назначать низкую цену во всей дальнейшей игре. Таким образом, если отказ от сотрудничества произойдет в k-м раунде, то фирма не может получить больше, чем

$$\sum_{t=1}^{k-1} \delta_i^{t-1} \cdot 2 + \delta_i^{k-1} \cdot 3 + \sum_{t=k+1}^{\infty} \delta_i^{t-1} \cdot 0.$$

[2]Поскольку $\delta_i \in (0;1)$, то при ограниченности выигрышей в исходной игре ряд сходится.

(Она получит 2 в раундах $1,\ldots,k-1$, 3 в раунде k и 0 в раундах $k+1,k+2,\ldots$.) Если же ни одна из фирм не будет отклоняться от триггерной стратегии, то их выигрыши составят

$$\sum_{t=1}^{\infty}\delta_i^{t-1}\cdot 2.$$

Значит, чтобы отклоняться было невыгодно, должно быть выполнено неравенство

$$\sum_{t=1}^{\infty}\delta_i^{t-1}\cdot 2 \geq \sum_{t=1}^{k-1}\delta_i^{t-1}\cdot 2+\delta_i^{k-1}\cdot 3+\sum_{t=k+1}^{\infty}\delta_i^{t-1}\cdot 0$$

или

$$\sum_{t=k}^{\infty}\delta_i^{t-1}\cdot 2 \geq \delta_i^{k-1}\cdot 3.$$

Сделаем в сумме замену индекса: $s=t-k$. Тогда это неравенство будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{s=0}^{\infty}\delta_i^{s+k-1}\cdot 2 \geq \delta_i^{k-1}\cdot 3$$

или, после деления на δ_i^{k-1},

$$\sum_{s=0}^{\infty}\delta_i^{s}\cdot 2 \geq 3.$$

Воспользуемся теперь формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-\delta_i}\cdot 2 \geq 3,$$

что эквивалентно неравенству $\delta_i \geq \frac{1}{3}$.

Таким образом, если дисконтирующие множители малы, то будущие выигрыши имеют малое значение для фирм и им будет выгодно отклонится от триггерных стратегий. Если же дисконтирующие множители достаточно велики, то триггерные стратегии будут составлять равновесие, в котором будет иметь место сотрудничество.

Следует отметить, однако, что рассмотренное равновесие будет не единственным совершенным в подыграх равновесием в бесконечно повторяющейся Игре 17. На самом деле в бесконечно повторяющихся играх практически всегда равновесий бесконечно много. В частности, стратегии, согласно которым независимо от предыстории фирмы всегда назначают низкие цены, тоже составляют равновесие.

При каких условиях на дисконтирующие множители триггерные стратегии составляют равновесие в Игре 20 на с. 97? **?**

Существует теорема (в англоязычной литературе она известна под названием *Folk Theorem*, что на русский можно перевести как «Народная теорема»), утверждающая, что в бесконечно повторяющейся конечной статической игре с полной информацией любой «разумный» вектор выигрышей может возникнуть в некотором совершенном в подыграх равновесии, если дисконтирующие множители достаточно близки к единице. Под разумным вектором выигрышей мы понимаем такой вектор выигрышей, который является выпуклой комбинацией выигрышей исходной игры (с точностью до множителей $1-\delta_i$, необходимых для того, чтобы сделать выигрыши сопоставимыми), и, кроме того, в нем каждый элемент должен быть не меньше некоторой пороговой величины. В разных вариантах теоремы пороговая величина разная: это либо выигрыш в каком-либо равновесии Нэша исходной игры, либо минимаксный выигрыш.

Эту теорему можно интерпретировать как утверждение о том, что в бесконечно повторяющейся игре «почти все возможно». Кроме того, из теоремы можно сделать вывод, что в бесконечно повторяющейся игре совершенных в подыграх равновесий бывает, как правило, «слишком много». Понятно, что это снижает ценность полученного выше результата о возникновении сотрудничества в Игре 17.

5.5. «Лишние» равновесия в динамических играх с несовершенной информацией

Совершенное в подыграх равновесие — недостаточно сильная концепция равновесия, поскольку не «вычищает» некоторые неестественные равновесия.

Например, дерево Игры 43 можно привести к эквивалентному виду, показанному на Рис. 5.8 (ср. с Рис. 5.5). На дереве *н* означает «не входить», *ва* — войти и вести себя агрессивно, *вм* — войти и вести себя мирно. Решение Фирмы 1 о входе в отрасль на данном дереве игры совмещено с решением о поведении после входа.

В Таблице 5.6 эта альтернативная развернутая форма игры преобразована к нормальной форме. Полученная нормальная форма сильно напоминает нормальную форму, которая изображена в Таблице 5.3,

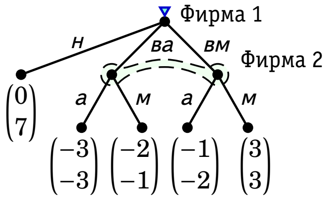


Рис. 5.8. Еще один вариант дерева Игры 43

Таблица 5.6. Нормальная форма Игры 43

		Фирма 2: *а*	Фирма 2: *м*
Фирма 1	*н*	$\underline{0}$, $\underline{7}$	0, $\underline{7}$
	ва	-3, -3	-2, $\underline{-1}$
	вм	-1, -2	$\underline{3}$, $\underline{3}$

только в Таблице 5.6 первые две из стратегий Фирмы 1 объединены в одну стратегию *н* (если фирма не войдет в отрасль, то ей не нужно будет делать выбор между *а* и *м*). Видно, что в игре имеется два равновесия Нэша: (*вм*, *м*) и (*н*, *а*). Оба равновесия являются совершенными в подыграх, поскольку имеется только одна подыгра — игра в целом.

В первом из этих равновесий Фирма 1 перестает быть монополией и обе фирмы ведут себя мирно. Второе из этих равновесий можно интерпретировать как угрозу со стороны Фирмы 2 быть агрессивной по отношению к Фирме 1, если та войдет в отрасль. Если Фирме 1 считает, что Фирма 2 выполнит свою угрозу, то ей выгодно не входить в отрасль. Но проблема с этим равновесием состоит в том, что как только Фирма 1 войдет, Фирме 2 уже невыгодно быть агрессивной.

Здесь мы незначительно модифицировали дерево игры, не меняя сущности самой игры, и это привело к появлению неубедительного равновесия. Конечно, можно было бы использовать дерево Рис. 5.5. Но избавится от «лишних» совершенных в подыграх равновесий можно не только видоизменением дерева игры, но и усилением концепции решения. Такую концепцию — совершенное байесовское равновесие — мы еще рассмотрим в дальнейшем.

5.6. Смешанные и поведенческие стратегии

Пока что мы абстрагировались от возможности рандомизации в динамических играх. Но в отличие от игр с совершенной информацией, в играх с несовершенной информацией решение в чистых стратегиях может не существовать, как показывает следующий пример. Отсутствие решений в чистых стратегиях заставляет рассматривать смешанные стратегии по аналогии со статическими играми.

Игра 45: Расширим Игру 41 «Чет или нечет», добавив для Игрока 1 возможность отказаться от участия в игре (o). Если Игрок 1 откажется, оба игрока получат выигрыш 0,2. Дерево этой игры представлено на Рис. 5.9. ⊙

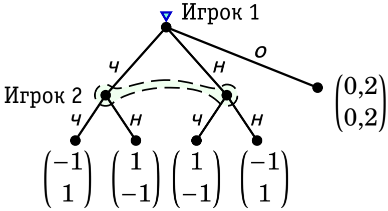


Рис. 5.9. Дерево Игры 45 (расширенной игры «Чет или нечет»)

Нормальная форма Игры 45 показана в Таблице 5.7. По подчеркнутым оптимальным откликам видно, что в этой игре нет равновесия Нэша в чистых стратегиях.

Конечно, мы можем прямо перенести понятие смешанной стратегии на динамические игры, воспользовавшись представлением этих игр в нормальной форме. Согласно такой интерпретации, *смешанная стратегия* игрока — это вероятности, с которыми игрок выбирает свои чистые стратегии. В этом случае игроки рандомизируют стратегии до начала игры.

Найдите равновесие Нэша в смешанных стратегиях для Игры 45, пользуясь ее нормальной формой. ?

Таблица 5.7. Нормальная форма Игры 45

		Игрок 2	
		ч	*н*
Игрок 1	*ч*	-1; $\underline{1}$	$\underline{1}$; -1
	н	$\underline{1}$; -1	-1; $\underline{1}$
	о	0,2; $\underline{0{,}2}$	0,2; $\underline{0{,}2}$

Однако более предпочтительной кажется другая концепция: игроки рандомизируют при выборе действия по достижении определенного информационного множества. Эта концепция (локальная рандомизация) лучше соответствует идеологии динамических игр.

В первом случае говорят о смешанной стратегии. во втором случае — о поведенческой стратегии. Стратегию с рандомизацией действий принято называть **поведенческой стратегией**. Поведенческая стратегия должна указывать для каждого информационного множества, в котором ход принадлежит игроку, некоторое распределение вероятностей на множестве действий, из которых он выбирает в данном информационном множестве. При этом предполагается, что распределения вероятностей в разных информационных множествах статистически независимы.

Фундаментальный результат, принадлежащий Хэрольду Куну, состоит в том, что в играх с идеальной памятью (со случайным выбором чистых стратегий).

Хэрольд Кун в работе 1953 года [10] доказал фундаментальный результат, что обе концепции эквивалентны для игр с идеальной памятью, т. е. что в играх с идеальной памятью использование поведенческих стратегий эквивалентно использованию смешанных стратегий. Под эквивалентностью двух наборов стратегий подразумевают то, что они порождают одно и то же распределение вероятностей на множестве конечных вершин. В результате то, чего игрок может добиться с помощью одного типа стратегий, он может добиться и с помощью стратегии другого типа, и наоборот.

Рассмотрим эквивалентность поведенческих и смешанных стратегий на примере модифицированной развернутой формы Игры 45 (Рис. 5.10). В этой развернутой форме сначала Игрок 1 решает, участвовать ли в дальнейшей игре (*у*) или отказаться (*о*). Одновременный

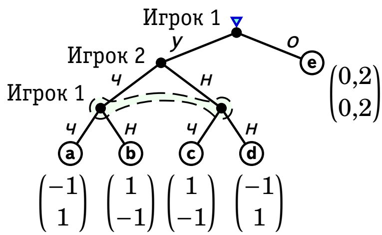


Рис. 5.10. Модифицированное дерево Игры 45

выбор игроками стратегий *ч* и *н* в модифицированной развернутой форме представлен так, как если бы Игрок 2 делал свой выбор прежде Игрока 1.

Поведенческие стратегии можно задать указанием вероятности α, с которой Игрок 1 выбирает *у*, вероятности β, с которой Игрок 2 выбирает *ч*, и вероятности γ, с которой Игрок 1 выбирает *ч*. Смешанную стратегию первого игрока можно задать вероятностями $p_{уч}$, $p_{ун}$, $p_{оч}$ и $p_{он}$ (Одна из четырех вероятностей избыточна — выражается через остальные.). Соответственно, смешанную стратегию второго игрока можно задать вероятностью q выбора *ч*. Распределение вероятностей на конечных вершинах показано в Таблице 5.8. Очевидно, что два вида стратегий эквивалентны и соответствие между ними достигается при выполнении условий $p_{уч} = \alpha\gamma$, $p_{ун} = \alpha(1-\gamma)$ и $q = \beta$.

По данным смешанным стратегиям однозначно (кроме случая, когда $p_{уч} + p_{ун} = 0$) определяются поведенческие:

$$\alpha = p_{уч} + p_{ун}, \quad \beta = q, \quad \gamma = \frac{p_{уч}}{p_{уч} + p_{ун}}.$$

Вероятность γ рассчитывается как условная вероятность по формуле Байеса. Это вероятность того, что Игрок 1 на втором ходе выберет *ч*, при том условии, что на первом ходе он выбрал *у*.

В дальнейшем мы везде, где это не приводит к неоднозначности, будем говорить о *смешанных* стратегиях, имея в виду *поведенческие* стратегии.

Алгоритм обратной индукции можно естественным образом распространить на случай случайного выбора игроками своих действий. Заметим, что в играх с совершенной информацией с различными выигрышами такая обратная индукция даст то же самое единственное решение, что и обычная обратная индукция. Смешанные стратегии

Таблица 5.8. Распределение вероятностей на конечных вершинах для примера эквивалентности поведенческих и смешанных стратегий

вершина	поведенческие	смешанные
a	$\alpha\beta\gamma$	$p_{уч}q$
b	$\alpha\beta(1-\gamma)$	$p_{уч}(1-q)$
c	$\alpha(1-\beta)\gamma$	$p_{ун}q$
d	$\alpha(1-\beta)(1-\gamma)$	$p_{ун}(1-q)$
e	$1-\alpha$	$p_{оч}+p_{он}=1-p_{уч}-p_{ун}$

Для игры изображенной на Рис. 5.2(b), рассмотрите следующую смешанную стратегию Игрока 2: с вероятностью 1/2 во всех информационных множествах выбирать левую ветвь, и с вероятностью 1/2 во всех информационных множествах выбирать правую ветвь. Покажите, пользуясь этой стратегией, что смешанные и поведенческие стратегии в данной игре не эквивалентны. Приведите другие примеры, показывающие, что смешанные и поведенческие стратегии в данной игре не эквивалентны.

?

в этом решении будут вырожденными: каждый игрок будет выбирать одно из действий с единичной вероятностью. По-видимому, смешанные стратегии имеет смысл рассматривать только в играх с несовершенной информацией.

Рассмотрим в качестве примера Игру 44 «Набеги на банки» (с. 173). Как мы уже видели, в этой игре существует три равновесия в чистых стратегиях. Мы сейчас увидим, что в игре, кроме того, существуют равновесия в смешанных стратегиях.

Обозначим через μ_1 вероятность того, что первый вкладчик не забирает деньги на первом этапе (вероятность выбора L_1), а через ν_1 — вероятность того, что второй вкладчик не забирает деньги на первом этапе (вероятность выбора L_2). Соответствующие вероятности на втором этапе обозначим μ_2 и ν_2 (вероятности выбора L_3 и L_4 соответственно).

В игре второго этапа существуют три равновесия Нэша в смешанных стратегиях (см. Рис. 5.11). Два из этих равновесий — равновесия в вырожденных смешанных стратегиях. Есть также равновесие в невырожденных смешанных стратегиях: $\mu_2 = 1/2$ и $\nu_2 = 1/2$. Ожидаемые выигрыши вкладчиков составят при этом по 3/2. Структура равновесий в «свернутой» игре первого этапа зависит от того, какое из трех возможных равновесий второго этапа ожидают игроки. Равновесия в вырожденных смешанных стратегиях аналогичны рассмотренным выше равновесиям в игре с чистыми стратегиями. Кроме того, в «свернуой» игре при $v_1, v_2 = 3$ (когда на втором этапе оба оставляют деньги в банке) существует равновесие в невырожденных смешанных стратегиях: $\mu_1 = 1/2$ и $\nu_1 = 1/2$.

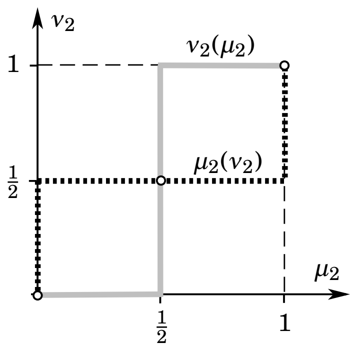


Рис. 5.11. Равновесия в смешанных стратегиях второго этапа игры «Набеги на банки»

Глава 6

Статические игры с неполной информацией (байесовские)

Байесовские игры. Байесовские равновесия. Асимметричность информации.

6.1. Введение

Ранее мы предполагали, что все игроки знают функции выигрыша остальных игроков. Но это подразумевает, что каждый из игроков может получить всю ту информацию, которой обладают остальные игроки. Такое упрощающее предположение может оказаться слишком ограничительным. Многие экономические явления невозможно адекватно описать, не отказавшись от него. Например, в ситуации торга один игрок может не знать точно, каким будет выигрыш другого игрока, если они не достигнут соглашения.

Мы рассмотрим здесь разновидность игр, в которых игроки могут не знать точно цели других игроков и другую важную информацию. Выигрыши игроков могут зависеть от случайных событий, при этом игроки в разной степени владеют информацией о том, какое именно событие произошло. Чтобы это учесть, можно дополнительно ввести воображаемый случайный ход, который происходит в начале игры, и который определяет, какой именно частной информацией будет обладать каждый из игроков. Эта частная информация называется **типом** игрока. Каждый из игроков может быть нескольких типов. При этом считается, что каждый из игроков знает только свой собственный тип.

Можно считать, что первый ход делает *природа*. Она сопоставляет каждому из игроков случайную переменную, которая указывает тип этого игрока. При этом природа использует некоторое известное всем игрокам заранее совместное распределение типов игроков.

Такого рода игры называют **играми с неполной информацией** или **байесовскими играми**. Эти игры ввел Дж. Харшаньи в своей статье 1968 года. Концепция игр с неполной информацией оказывается очень плодотворной поскольку позволяет моделировать различные ситуации, в которых игроки в разной степени информированы или, другими словами, *асимметрично* информированы.

В этой главе мы разберем *статические* игры с неполной информацией. Динамическим играм с неполной информацией посвящена глава 7.

Описание статической байесовской игры, ее нормальная форма, должно включать в себя следующие составляющие:

- множество игроков;
- для каждого игрока — множество типов;
- распределение вероятностей на множествах типов;
- для каждого игрока — множество возможных действий;
- для каждого игрока — функции выигрышей, сопоставляющие данному набору типов и данному профилю стратегий выигрыши игроков.

Видим, что, описание нормальной формы игры с неполной информацией (в отличие от нормальной формы игры с полной информацией) включает не только игроков и их функции полезности, но также и их типы и вероятности появления типов игроков. Предполагается, что все типы одного и того же игрока имеют одинаковые множества действий[1]. Выигрыш в статических байесовских играх зависит не только от выбранных игроками стратегий, но и от того, какие именно типы, $\theta_1,\ldots,\theta_n$, участвуют в игре.

Рассмотрим пример байесовской игры.

Игра 46 («Субботник»): В игре участвуют два игрока $i = 1,2$. Каждый из них решает, прийти ли на субботник. Полезность чистоты в ре-

[1] Если рассматривается ситуация, в которой множества возможных действий разные у разных типов, то это можно смоделировать, введя для некоторых действий чрезвычайно маленькие выигрыши («равные минус бесконечности»), так чтобы соответствующий тип их заведомо не стал выбирать.

зультате субботника для игрока i составляет v_i. Величина v_i может быть равна 36 (если игрок имеет тип H) или 12 (если игрок имеет тип L). Кроме того, выигрыш игрока уменьшается, если он сам участвует в субботнике, поскольку приходится трудиться. Если один игрок участвовал в субботнике, то его выигрыш на 24 меньше, а если оба участвовали, то выигрыш каждого на 12 меньше. Игрок знает только свой тип, но не тип другого игрока. Игрок 1 может быть типа H с вероятностью μ, а Игрок 2 может быть типа H с вероятностью ν (и другой игрок знает эту вероятность). Типы двух игроков независимы. ⊙

Игра представлена в Таблице 6.1. В таблице «+» означает «прийти на субботник», а «–» означает «не прийти». Рядом с типом игрока указана вероятность его появления.

Таблица 6.1. Матрица выигрышей в Игре 46 «Субботник»

			Игрок 2		
		H $[\nu]$		L $[1-\nu]$	
		+	–	+	–
Игрок 1	H $[\mu]$ +	24 24	36 12	0 24	12 12
	H $[\mu]$ –	12 36	0 0	−12 36	0 0
	L $[1-\mu]$ +	24 0	36 −12	0 0	12 −12
	L $[1-\mu]$ –	12 12	0 0	−12 12	0 0

В данной игре Игрока 1 может быть двух типов: H и L. Игрок 2 тоже может быть двух типов: H и L. *Независимость типов* игроков (ее еще неформально называют *некоррелированностью типов*) означает, что вероятность некоторого набора типов всех игроков получается перемножением вероятностей отдельных типов. Это случай, когда знание своего типа не дает игроку дополнительной информации о типах других игроков. Например, в рассматриваемой игре вероятность того, что Игрок 1 имеет тип L равна $1-\mu$, вероятность того, что Игрок 2 имеет тип H равна ν, а значит, вероятность того, что в игре участвуют типы (L, H) равна $(1-\mu)\nu$.

Существует две различные интерпретации типа игрока. Согласно первой интерпретации каждый игрок — это один и тот же индивидуум, но обладающий разными характеристиками в зависимости

Рассмотрите модификацию Игры 46, в которой оба игрока знают не только свой тип, но и тип другого игрока. Объясните, почему игра фактически распадается на четыре отдельные игры с полной информацией. Найдите равновесия Нэша в каждой из этих четырех игр и даете их содержательную интерпретацию.

от каких-то случайных факторов. Например, игрок может в момент участия в игре иметь хорошее настроение или плохое. Другой пример: в карточных играх игроку могут достаться те или иные карты.

Согласно второй интерпретации роль i-го игрока могут играть разные индивидуумы, обладающие разными характеристиками. Природа случайным образом выбирает одного из этих индивидуумов на роль i-го игрока. Например, на рынке могут случайным образом встретиться покупатель и продавец, и между ними происходит некоторая игра торга.

6.2. Равновесие Байеса—Нэша

Стратегии в статических байесовских играх не совпадают с действиями. В соответствии со сложившейся терминологией, стратегия игрока описывает, как будет действовать *каждый* из типов данного игрока. Можно представить стратегию как функцию $s_i(\cdot)$, которая ставит в соответствие каждому типу θ_i данного игрока некоторые действия $s_i(\theta_i)$.

Естественное обобщение рациональности поведения игрока в данном случае состоит в том, что каждый тип каждого игрока максимизирует ожидаемый выигрыш при некоторых предположениях относительно стратегий других игроков. Результат такой оптимизации — оптимальный отклик.

Поскольку игрок знает свой тип, то математическое ожидание должно быть *условным* относительно этого типа. Условные вероятности в общем случае рассчитываются по формуле Байеса — отсюда и термины «байесовские игры», «байесовское равновесие». Если типы игроков независимы, то расчет ожидаемого выигрыша упрощается, поскольку можно непосредственно использовать безусловные вероятности появления типов других игроков.

Найдем оптимальный отклик Игрока 1 в Игре 46 на стратегию $(+, -)$ Игрока 2 (участвовать в субботнике, если он имеет тип H, и не участвовать, если имеет тип L). Каким будет выбор первого игрока, если он имеет тип H? Поскольку типы игроков некоррелированы, то при расчете ожидаемого выигрыша используются безусловные вероятности типов другого игрока, т. е. ν для H и $1-\nu$ для L. Если Игрок 1 ожидает, что стратегией Игрока 2 является (+, −), то его ожидаемая полезность от действий + и − равна соответственно

$$\begin{aligned} +&: \quad \nu\cdot 24+(1-\nu)\cdot 12 = 12+12\nu, \\ -&: \quad \nu\cdot 36+(1-\nu)\cdot 0 = 36\nu. \end{aligned}$$

Следовательно, первый игрок типа H может выбрать +, если выполнено условие

$$12+12\nu \geq 36\nu$$

или

$$\nu \leq 1/2.$$

Рассмотрим теперь выбор первого игрока, если он имеет тип L. Если он ожидает, что стратегией второго игрока является (+, −), то его ожидаемая полезность от двух вариантов действий равна

$$\begin{aligned} +&: \quad \nu\cdot 0+(1-\nu)\cdot(-12) = 12\nu-12, \\ -&: \quad \nu\cdot 12+(1-\nu)\cdot 0 = 12. \end{aligned}$$

Первый игрок типа L в любом случае выберет −, поскольку $12\nu-12 < 12$ для всех $\nu \in [0;1]$.

В Таблице 6.2 указаны рассчитанные ожидаемые выигрыши обоих игроков при $\mu = 3/4$, $\nu = 2/3$. Оптимальные отклики показаны подчеркиванием выигрышей.

Для байесовских игр Джоном Харшаньи предложена концепция равновесия, аналогичная равновесию Нэша в играх с полной информацией[2]. Это так называемое **равновесие Байеса—Нэша** (или **байесовское равновесие Нэша**). Его также часто называют просто **байесовским равновесием**.

> Профиль стратегий $(\bar{s}_1(\cdot),\ldots,\bar{s}_m(\cdot))$ является байесовским равновесием в игре с неполной информацией, если для каждого типа $\theta_i \in \Theta_i$ каждого игрока i действия $\bar{s}_i(\theta_i)$ максимизируют его ожидаемую полезность в предположении, что все другие игроки выбрали равновесные стратегии.

[2] См. [9].

Таблица 6.2. Ожидаемые выигрыши для в Игры 46

		+, +	+, –	–, +	–, –
Игрок 1, H	+	24	20	$\underline{16}$	$\underline{12}$
	–	$\underline{36}$	$\underline{24}$	12	0
Игрок 1, L	+	0	-4	-8	-12
	–	$\underline{12}$	$\underline{8}$	$\underline{4}$	$\underline{0}$

		+, +	+, –	–, +	–, –
Игрок 2, H	+	24	21	$\underline{15}$	$\underline{12}$
	–	$\underline{36}$	$\underline{27}$	9	0
Игрок 2, L	+	0	-3	-9	-12
	–	$\underline{12}$	$\underline{9}$	$\underline{3}$	$\underline{0}$

Как и в обычном равновесии Нэша равновесная стратегия каждого из игроков представляет собой оптимальный отклик на равновесные стратегии других игроков. Также по аналогии с обычным равновесием Нэша можно дать следующую характеристику равновесия Байеса—Нэша.

> В равновесии ни один из типов ни одного из игроков не имеет стимула менять свои действия по сравнению с теми действиями, которые предписываются равновесной стратегией.

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим условия на параметры μ и ν, при которых в Игре 46 профиль стратегий «если игрок имеет тип H, то он придет на субботник; если игрок имеет тип L, то он не придет», т. е. $((+, -), (+, -))$, будет равновесием Байеса—Нэша.

Тип L любого из игроков всегда выбирает –. Поэтому достаточно рассмотреть поведение типа H. Как мы видели, тип H Игрока 1 выбирает + при $\mu \leq 1/2$. Для Игрока 2 рассуждения аналогичные и приводят к тем же условиям на вероятность μ, поскольку игроки одинаковы с точностью до замены обозначений: тип H Игрока 2 выбирает + при $\nu \leq 1/2$. Таким образом, условия

$$\mu \leq 1/2, \quad \nu \leq 1/2$$

гарантирует, что набор стратегий $((+, -), (+, -))$ будет байесовским равновесием.

Теперь взглянем на ту же игру с другой стороны. Предположим, что $\mu = 3/4$, $\nu = 2/3$ и найдем здесь все байесовские равновесия. (Понятно, что равновесия рассмотренного только что вида в этом случае быть не может.)

Нормальная форма в Таблице 6.3 получена на основе данных из Таблицы 6.2. Выигрыш каждого из двух игроков представлен как двухэлементный вектор, первый элемент которого соответствует выигрышу типа H, а второй элемент — выигрышу типа L.

Таблица 6.3. Нормальная форма Игры 46

		Игрок 2			
		+, +	+, −	−, +	−, −
Игрок 1	+, +	$(24;0)$ $(24;0)$	$(24;\underline{12})$ $(20;-4)$	$(\underline{36};0)$ $(\underline{16};-8)$	$(\underline{36};\underline{12})$ $(\underline{12};-12)$
	+, −	$(21;-3)$ $(24;\underline{12})$	$(21;\underline{9})$ $(20;\underline{8})$	$(\underline{27};-3)$ $(\underline{16};\underline{4})$	$(\underline{27};\underline{9})$ $(\underline{12};\underline{0})$
	−, +	$(\underline{15};-9)$ $(\underline{36};0)$	$(\underline{15};\underline{3})$ $(\underline{24};-4)$	$(9;-9)$ $(12;-8)$	$(9;\underline{3})$ $(0;-12)$
	−, −	$(\underline{12};-12)$ $(\underline{36};\underline{12})$	$(\underline{12};\underline{0})$ $(\underline{24};\underline{8})$	$(0;-12)$ $(12;\underline{4})$	$(0;\underline{0})$ $(0;\underline{0})$

Выигрыши, соответствующие оптимальным откликам в Таблице 6.3 подчеркнуты. Равновесиям Байеса—Нэша соответствуют такие клетки, в которых все четыре выигрыша подчеркнуты. Видно, что рассматриваемая игра имеет два симметричных равновесия: ((+, −), (−, −)) и ((−, −), (+, −)). В каждом из этих равновесий один игрок приходит на субботник, только если имеет тип H, а другой игрок в любом случае не приходит на субботник.

Заметим, что среди байесовских равновесий выделяют **объединяющие** и **разделяющие**. Объединяющее равновесие — это такое, в котором все типы игрока действуют одинаково. В разделяющем равновесии все типы игрока действуют по-разному. В данном случае равновесия являются объединяющими для одного игрока и разделяющими для другого.

Следует отметить, что между равновесием Байеса—Нэша и равновесием Нэша существует более глубокая связь, чем отмечено выше. Данное ранее определение равновесия Байеса—Нэша основано на том, что каждый тип каждого игрока максимизирует свою ожидаемую полезность. Вместо этого можно предполагать, что каждый игрок максимизирует общую ожидаемую полезность, которая рассчитывается как математическое ожидание по возможным типам этого игрока с соответствующими вероятностями. Эти два подхода фактически эквивалентны между собой[3]. Если использовать нормальную форму с этой общей ожидаемой полезностью, то равновесие Нэша в ней будет соответствовать равновесию Байеса—Нэша в исходной игре.

Найдем такую нормальную форму для Игры 46 при $\mu = 3/4$, $\nu = 2/3$. Для этого нужно найти математические ожидания выигрышей из Таблицы 6.3, используя вероятности 3/4 и 1/4 для Игрока 1 и 2/3 и 1/3 для Игрока 2. Например, профилю стратегий ((+, +), (−, −)) соответствуют выигрыши

$$\frac{3}{4}\cdot 12+\frac{1}{4}\cdot(-12)=6$$

и

$$\frac{2}{3}\cdot 36+\frac{1}{3}\cdot 12=28.$$

Соответствующая матрица выигрышей с подчеркнутыми оптимальными откликами представлена в Таблице 6.4. В игре имеется два равновесия Нэша, совпадающие с найденными ранее: ((+, −), (−, −)) и ((−, −), (+, −)).

Таблица 6.4. Нормальная форма Игры 46 — по ожидаемым выигрышам игроков

Игрок 1 \ Игрок 2	+, +	+, −	−, +	−, −
+, +	18, 16	14, 20	10, 24	6, $\underline{28}$
+, −	21, 13	17, 17	$\underline{13}$, 17	$\underline{9}$, $\underline{21}$
−, +	27, 7	17, $\underline{11}$	7, 3	−3, 7
−, −	$\underline{30}$, 4	$\underline{20}$, $\underline{8}$	10, −4	0, 0

[3] Различие проявляется только если вероятность какого-то типа может быть нулевой.

6.3. Статические байесовские игры с коррелированными типами

Исходно игрок знает только свой тип. Но типы игроков могут быть взаимосвязаны между собой в вероятностном смысле. Поэтому по своему типу игрок в некоторых случаях может делать выводы о том, какого типа другие игроки. Может быть так, что игрок по своему типу может точно определить тип другого игрока. В байесовской игре неполнота информации означает, что по крайней мере один игрок не точно знает тип некоторого другого игрока.

«Знает» или «не знает» здесь определяется по формуле Байеса. Отсюда и название. Игры называются байесовскими из-за того, что их анализ должен быть вероятностным и построен на условных вероятностях. Зная свой тип и общее распределение типов, игрок может создать себе определенное представление о типах других игроков, если воспользуется условным распределением (условным относительно своего типа, который с точки зрения этого игрока не является случайным).

Следующий пример не является полноценной игрой. По сути это ситуация байесовского принятия решения, подобная той, которые мы рассматривали в главе 1, поскольку выбор в нем делает только один игрок. Однако этот пример включает все те компоненты байесовской игры, о которых здесь говорилось. Он показывает, как можно моделировать то, что один и тот же игрок может в зависимости от некоторых случайных обстоятельств обладать разным объемом информации. Размышления над этой игрой позволяют сломать некоторые стереотипы, которые могут сложиться на основе формального определения байесовской игры. Кроме того, это пример игры в которой типы не являются независимыми (игры с *коррелированными типами*).

Игра 47 («Вахтер»): На входе в некоторое учреждение стоит вахтер. В учреждение могут войти посетители двух типов: «свои» и «чужие» (будем их для краткости обозначать A и B). Некоторые посетители кажутся вахтеру своими, а некоторые — чужими. Таким образом, в данной игре есть 2 типа вахтера (обозначим их соответственно a и b). Вахтер может проверить у посетителя наличие пропуска. При этом, если посетитель окажется своим, то выигрыш вахтера составит -1, а если чужим, то 1. Если вахтер не проверит посетителя, то получит выигрыш 0. ⊙

Посетитель в этой игре не имеет никакого выбора. По сути дела, эта игра вахтера с природой. Матрица игры приведена в Таблице 6.5. Вероятность того, что свой посетитель кажется вахтеру своим обозначена p_{Aa} и т. д. Заметим, что по смыслу игры, если вахтер достаточно опытен, то вероятности появления типов не должны быть независимыми.

Таблица 6.5.

Вахтер		Посетитель A		Посетитель B	
a	*проверять*	-1	$[p_{Aa}]$	1	$[p_{Ba}]$
	не проверять	0		0	
b	*проверять*	-1	$[p_{Ab}]$	1	$[p_{Bb}]$
	не проверять	0		0	

Условная вероятность того, что посетитель свой, если он кажется своим, равна $p_{Aa}/(p_{Aa}+p_{Ba})$, а условная вероятность того, что посетитель чужой, если он кажется своим, равна $p_{Ba}/(p_{Aa}+p_{Ba})$. Таким образом, ожидаемый выигрыш вахтера типа a, если он проверяет документы, равен

$$\frac{p_{Aa}}{p_{Aa}+p_{Ba}}\cdot(-1)+\frac{p_{Ba}}{p_{Aa}+p_{Ba}}\cdot 1,$$

а если не проверяет, то 0. Аналогично, ожидаемый выигрыш вахтера типа b, если он проверяет документы, равен

$$\frac{p_{Ab}}{p_{Ab}+p_{Bb}}\cdot(-1)+\frac{p_{Bb}}{p_{Ab}+p_{Bb}}\cdot 1,$$

а если не проверяет, то 0.

Если вахтер опытен, то вероятность p_{Aa} велика по сравнению с вероятностью p_{Ba}, а вероятность p_{Ab} велика по сравнению с вероятностью p_{Bb}, и естественно ожидать, что вахтер будет проверять документы у тех, кто ему кажется чужими и не будет проверять документы у тех, кто ему кажется своими.

Глава 7

Динамические байесовские игры и совершенное байесовское равновесие

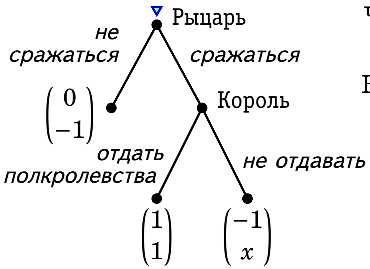
Динамические байесовские игры. Совершенное в подыграх равновесие в динамических байесовских играх. Представление игр с неполной информацией (байесовских игр) в виде игр с несовершенной информацией. Использование формулы Байеса для расчета представлений в информационных множествах. Совершенное байесовское равновесие.

7.1. Введение

Начнем этот параграф с рассмотрения разновидности игр, которые являются таким же обобщением статических байесовских игр, каким являются динамические игры с полной информацией для статических игр с полной информацией, т. е. **динамические байесовские игры** (динамические игры с неполной информацией).

В качестве примера динамической байесовской игры, рассмотрим вариант Игры 36 «Король и рыцарь».

Игра 48 («Честный король и рыцарь»): Пусть в отличие от Игры 36 рыцарь знает, что короли бывают двух типов: честные и нечестные. Для честного короля принципиально важно сдержать свое слово и отдать рыцарю половину королевства, если тот победит дракона. Если рыцарь победит дракона, и честный король не сдержит своего слова, то его выигрыш будет равен $x=0$, в отличие от нечестного короля, для которого $x=2$ (Рис. 7.3). Вероятность встретить честного короля равна p. Рыцарь, принимая свое решение, не знает, с королем какого типа он имеет дело. ⊙



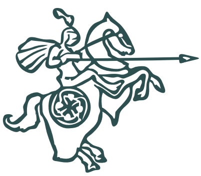
Честный король (вероятность p):
$x=0$

Нечестный король (вероятность $1-p$):
$x=2$

Рис. 7.1. Дерево Игры 48

Рассмотренную ранее концепцию решения для статических игр с неполной информацией — байесовское равновесие (равновесие Байеса—Нэша) — можно применить и к динамическим играм с неполной информацией. Но данная концепция может давать «лишние» равновесия в динамических играх, в которых игроки ходят по очереди, а не одновременно. Покажем это на примере Игры 48.

Таблица 7.1. Матрица выигрышей в Игре 48 «Честный король и рыцарь», приведенной к «статическому» виду



Рыцарь \ Король	честный $[p]$ *отд.*	честный $[p]$ *не отд.*	нечестный $[1-p]$ *отд.*	нечестный $[1-p]$ *не отд.*
сраж.	1 / 1	0 / −1	1 / 1	2 / −1
не сраж.	−1 / 0	−1 / 0	−1 / 0	−1 / 0

Если привести игру к «статическому» байесовскому виду, то получится матрица, показанная в Таблице 7.1. Для того, чтобы получить нормальную форму Игры 48, следует рассчитать ожидаемые выигрыши рыцаря в зависимости от стратегии короля. Если короли обоих типов отдают полкоролевства, то ожидаемый выигрыш рыцаря равен

1, а если не отдают, то −1. Если честный король отдает, а нечестный нет, то ожидаемый выигрыш равен

$$p \cdot 1 + (1-p) \cdot (-1) = 2p - 1.$$

Если честный король не отдает полкоролевства, а нечестный отдает, то ожидаемый выигрыш рыцаря равен

$$p \cdot (-1) + (1-p) \cdot 1 = 1 - 2p.$$

Остальные выигрыши в нормальной форме очевидны.

Нормальная форма рассматриваемой игры при $p = 0{,}75$ показана в Таблице 7.2. Выигрыши, соответствующие оптимальным откликам, указаны подчеркиванием. Видно, что в игре имеется два равновесия Нэша. Равновесие (*сражаться*, (*отдать*, *не отдавать*)) вполне естественно. Честный король отдает полкоролевства, а нечестный король — нет. При этом, поскольку вероятность, что король честный, относительно велика, рыцарю выгодно сражаться ($0{,}5 > 0$).

Таблица 7.2. Нормальная форма Игры 48 при $p = 0{,}75$

		Король (честный, нечестный)			
		(отд., отд.)	*(отд., не отд.)*	*(не отд., отд.)*	*(не отд., не отд.)*
Рыцарь	*сраж.*	$(\underline{1};1)$ $\underline{1}$	$(\underline{1};\underline{2})$ $\underline{0{,}5}$	$(0;1)$ $-0{,}5$	$(0;\underline{2})$ -1
	не сраж.	$(\underline{-1};\underline{-1})$ 0	$(\underline{-1};\underline{-1})$ 0	$(\underline{-1};\underline{-1})$ $\underline{0}$	$(\underline{-1};\underline{-1})$ $\underline{0}$

Другие два равновесия представляются неестественными. В обоих равновесиях честный король не отдает полкоролевства. Рыцарь, зная это, не будет сражаться ($-0{,}5 < 0$ для одного равновесия и $-1 < 0$ для другого). Король любого при том, что рыцарь не сражается, получает вне зависимости от своей стратегии −1, и он не может выиграть от изменения своей стратегии.

Частично эту проблему «лишних» равновесий можно снять, если рассматривать не только игру целиком, но и подыгры, т. е. «скрестить» совершенное в подыграх равновесие Нэша и равновесие Байеса—Нэша.

После того как рыцарь решит сражаться, начинается подыгра, в которой король одного из типов выбирает, отдавать полкоролевства или нет. В этой подыгре у рыцаря нет ходов, а у короля такие же четыре стратегии, как и в игре в целом. Таким образом, нормальная форма рассматриваемой подыгры — это *первая строчка* матрицы, изображенной в Таблице 7.2. Очевидно, что в этой подыгре честный король отдаст полкоролевства, а нечестный нет. Значит, первое из равновесий является совершенным в подыграх, а два других не являются.

Мы рассмотрели пока только случай $p = 0{,}75$. Но ясно, что в подыгре, начинающейся после того, как рыцарь решит сражаться, король будет использовать стратегию (*отдать*, *не отдавать*) вне зависимости от вероятности p.

Если рыцарь не будет сражаться, то он в любом случае получит 0. Если рыцарь будет сражаться, то он с вероятностью p он получит полкоролевства и выигрыш 1, а с вероятностью $1-p$ останется ни с чем и получит выигрыш -1. Ожидаемый выигрыш был вычислен выше; он равен $2p-1$. Рыцарю выгодно сражаться, если $p > 0{,}5$, т. е. если честные короли встречаются достаточно часто (тогда $2p-1>0$). Рыцарю не выгодно сражаться, если $p < 0{,}5$, т. е. если честные короли встречаются редко (тогда $2p-1 < 0$). (При $p = 0{,}5$ ему все равно, но такая ситуация вряд ли может возникнуть.)

Таким образом, при $p > 0{,}5$ единственным совершенным в подыграх равновесием Байеса—Нэша будет (*сражаться*, (*отдать*, *не отдавать*)), а при $p < 0{,}5$ совершенным в подыграх равновесием Байеса—Нэша будет (*не сражаться*, (*отдать*, *не отдавать*)). В вырожденном случае $p = 0{,}5$ существуют два совершенных в подыграх равновесия. Указанные равновесия являются *разделяющими*, поскольку согласно равновесной стратегии короля выбор действий зависит от типа короля.

7.2. Представление байесовских игр в виде динамических игр с несовершенной информацией

Важная идея, принадлежащая Дж. Харшаньи, состоит в том, что байесовские игры (игры с неполной информацией) можно представить как динамические игры с несовершенной информацией, если ввести в качестве дополнительного игрока *природу*, делающую случайные ходы. То, что игрок не знает типы других игроков, проявляется просто в том, что он не полностью владеет информацией о ходах, сделанных ранее природой. Это отражается с помощью соответствующего задания информационных множеств. Таким образом, анализ игр с неполной информацией можно всегда свести к анализу игр с полной, но несовершенной информацией.

На Рис. 7.2 показано построенное по этому принципу дерево игры «Вахтер» (Игра 47 на с. 194). Знаками «+» обозначены действия «проверять», а знаками «–», соответственно, «не проверять».

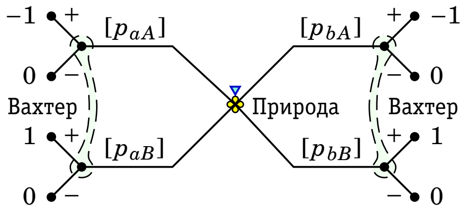


Рис. 7.2. Дерево игры «Вахтер»

Природа выбирает с соответствующими вероятностями одно из четырех возможных состояний: Aa, Ba, Ab или Bb. (Здесь Ba, например, означает, что посетитель чужой, но кажется вахтеру своим. Вахтер не различает A и B (свой или чужой), но различает a и b (кажется своим или кажется чужим). Это несовершенство информации отражается на дереве с помощью информационных множеств: состояния Aa и Ba неотличимы для вахтера и состояния Ab и Bb тоже для него неотличимы.

Таким же образом можно представить и динамическую байесовскую игру. Например, с учетом случайного хода природы дерево игры Игры 48 будет выглядеть так, как изображено на Рис. 7.3. Такое представление Игры 48 позволяет использовать для поиска решения обратную индукцию. Рассмотрим, как это делать.

В этой игре рыцарь может предсказать, что сделает король определенного типа. Если король честный, то он отдаст полкоролевства (так как $1 > 0$). Если король нечестный, то он оставит полкоролевства себе (так как $1 < 2$). Соответствующие действия помечены на Рис. 7.3 жирным пунктиром. После свертывания игра превращается в ситуацию принятия решения для рыцаря (Рис. 7.4). Как несложно проверить, полученные с помощью обратной индукции решения будут совпадать с найденными ранее совершенными в подыграх равновесиями.

Рассмотрим еще одну подобную игру.

Игра 49: [11] В два конверта кладется по 1000 руб., а третий конверт оставляется пустым. Конверты тасуются, игрок B наугад берет один из конвертов и изучает его содержимое. Затем происходит одноэтап-

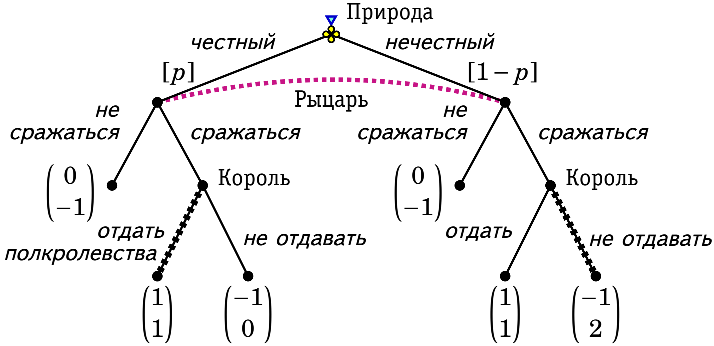


Рис. 7.3. Дерево Игры 48 со случайным ходом природы

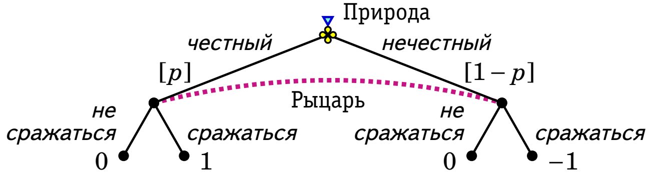


Рис. 7.4. Дерево свернутой Игры 48 — принятие решения рыцарем

Рассмотрите принятие решения рыцарем (Рис. 7.4). Покажите, что он будет сражаться при $p > 0{,}5$ и не будет сражаться при $p < 0{,}5$. Выпишите для каждого из случаев профили стратегий игроков и убедитесь, что они совпадают с найденными выше совершенными в подыграх байесовскими равновесиями.

ный торг. Игрок A предлагает купить конверт, доставшийся игроку B, за p руб. ($p \geq 0$), при этом он не имеет возможности узнать, что находится в конверте. Игрок B может либо принять это предложение, либо отклонить его. ⊙

В этой игре игрок B может быть одного из двух типов: ему может достаться конверт с деньгами или пустой конверт. Первый тип игрока B встречается с вероятностью 2/3, а второй — с вероятностью 1/3. Дерево игры изображено на Рис. 7.5.

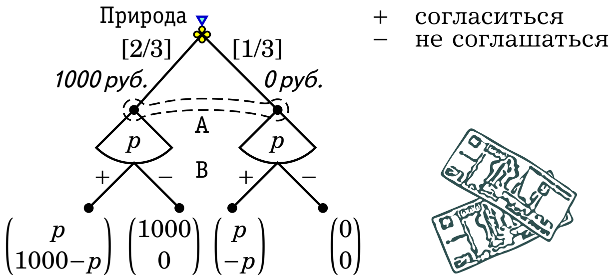


Рис. 7.5. Дерево Игры 49

Рассмотрим оптимальный отклик игрока B каждого из типов на цену p, предложенную игроком A.

Если бы A предложил купить конверт за любую положительную цену, меньшую 1000 руб., то B согласился бы, только если бы конверт был пуст. (Например, если бы A предложил купить конверт за 50 руб., то B отдал бы конверт за 50 руб., если бы конверт был пустым, и не согласился бы на сделку, если бы в нем лежали 1000 руб. Таким образом, для A выгоднее предложить 0 руб., чем 50 руб.)

Если бы A предложил купить конверт за цену, большую 1000 руб., то B согласился бы в любом случае, независимо от наличия денег в конверте.

Рассмотрим теперь решение игрока A. Какую цену p он должен предложить? Учитывая отклик B, выигрыш A при разных уровнях цены составил бы:

$$\begin{aligned}
p > 1000: &\quad 2/3 \times (1000 - p) + 1/3 \times (-p) = 2/3 \times 1000 - p,\\
p = 1000: &\quad 2/3 \times 0 + 1/3 \times (-1000) = -1/3 \times 1000,\\
p < 1000: &\quad 2/3 \times 0 + 1/3 \times (-p) = -1/3 \times p,\\
p = 0: &\quad 2/3 \times 0 + 1/3 \times 0 = 0.
\end{aligned}$$

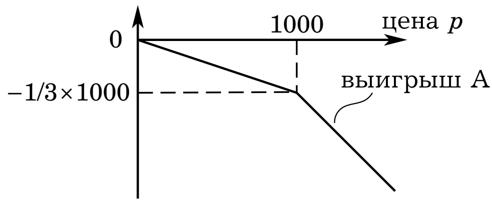


Рис. 7.6. Функция выигрыша игрока A в (свернутой) Игре 49 с учетом оптимального отклика игрока B

Выигрыш как функция цены убывает. Максимум достигается в нуле (см. Рис. 7.6). (При расчете выигрышей здесь игрок A предполагается нейтральным к риску. Анализ не сильно изменится, если ввести в анализ возрастающую элементарную функцию полезности.) Следовательно, A должен предложить 0 руб.

Проанализируйте Игру 49, предполагая, что ожидаемый выигрыш игрока A рассчитывается в соответствии с возрастающей элементарной функцией полезности $u(\cdot)$ и A исходно обладает богатством K. Подсказка: найдите знак производной по цене ожидаемой полезности игрока A (где полезность рассчитывается с учетом отклика игрока B).

Проанализируйте модифицированный вариант Игры 49, в котором все конверты должны достаться игроку B, игрок B заглядывает в один из трех конвертов, а игрок A предлагает деньги за один из тех двух конвертов, в которые игрок B еще не заглядывал.

Заметим, что в рассмотренных примерах не содержится специфических элементов, которые придают динамическим байесовским играм принципиально иной характер по сравнению с динамическими играми с совершенной и полной информацией или статическими байесовскими играми. Поэтому здесь для нахождения решения нам достаточно было воспользоваться обратной индукцией. Мы смогли проанализировать выбор рыцаря, поскольку знали, с какой вероят-

Пусть если игрок A в Игре 49 приобретает конверт у игрока B, то прилетает волшебник в голубом вертолете и удваивает количество денег, лежащих в конверте (т. е. $0 \to 0$ и $1000 \to 2000$). Проанализируйте этот модифицированный вариант игры,

?

ностью он мог в своем информационном множестве оказаться в левой вершине, а с какой — в правой.

Однако, зачастую такие вероятности неизвестны. Мы сталкивались уже с этой проблемой, рассматривая динамические игры с полной, но несовершенной информацией.

В связи с этом проблема «лишних равновесий» решается далеко не полностью. Некоторые неподходящие равновесия могут проистекать из того факта, что в динамической игре игроки имеют основание менять свои представления о вероятностях тех или иных типов в процессе игры. Такая процедура пересмотра ожиданий не предусматривается байесовским равновесием. Это делает байесовское равновесие некорректным инструментом для анализа динамических игр с неполной информацией. В дальнейшем мы рассмотрим более подходящую концепцию решения — совершенное байесовское равновесие. Эту концепцию можно применить, чтобы «вычистить» равновесия, порождаемые концепцией совершенного в подыграх равновесия Байеса—Нэша,

7.3. Ожидания в информационных множествах и совершенное байесовское равновесие

Использование развернутой формы игры со случайными ходами природы и информационными множествами предоставляет богатые возможности для моделирования и анализа самых различных жизненных ситуаций, характеризующихся неполнотой и/или несовершенством информации. При этом можно учесть не только исходное распределение информации между игроками, но и изменение такого распределения в процессе игры. Отдельный игрок может приобретать информацию в динамике, наблюдая ходы других игроков, которые уже владеют этой информацией. Можно изучать внутреннюю структуру явлений, в которых наблюдается передача информации другим игрокам или утаивание информации.

Как мы видели, анализируя динамические игры с совершенной информацией, важно, чтобы стратегия игрока была оптимальным откликом на стратегии других игроков не только в игре в целом, но и в каждой подыгре. (Это принято называть «последовательной рациональностью».) Но особенностью байесовских игр, представленных в развернутой форме, является то, что не каждое из информационных множеств начинает отдельную подыгру. Правильно было бы распространить требование последовательной рациональности на любое информационное множество, которое может возникнуть в игре.

Но что если игрок стоит перед выбором в некотором информационном множестве, состоящем более чем из одной вершины? Тогда его оптимальный выбор (при данных стратегиях других игроков) может зависеть от того, в какой именно вершине он находится. В подобных обстоятельствах ему приходится делать некоторые предположения относительно того, в какой вершине он находится или, более точно, с какой *вероятностью* он может находиться в той или иной вершине.

Можно ввести понятие системы **представлений** (**ожиданий**) игрока[1]. Система представлений игрока задает для каждого информационного множества данного игрока некоторое распределение вероятностей на вершинах этого информационного множества. Каждой вершине сопоставляется некоторая вероятность (из отрезка $[0;1]$). В целом сумма вероятностей по вершинам информационного множества равна 1.

Например, в начале игры игроки могут иметь некоторые исходные представления по поводу типа каждого игрока. Но эти представления не должны быть неизменными. Игроки могут корректировать данные представления по мере того, как идет игра, с учетом действий, выбираемых другими игроками.

Пусть все игроки выбрали некоторые стратегии. Как по данному профилю стратегий найти представления в информационных множествах? Покажем, как это делать, для случая чистых стратегий.

Пусть в игре отсутствуют случайные ходы природы. Рассмотрим некоторого игрока и информационное множество, в котором этому игроку принадлежит ход. Какими должны быть его ожидания в данном информационном множестве? Предположим, что траектория, соответствующая данному профилю стратегий и выходящая из начальной вершины, проходит через одну из вершин данного информационного множества. Рациональный игрок должен ожидать, что если игра достигнет данного информационного множества и ему придется делать в нем выбор, то он будет находиться именно в этой вершине.

[1] Англ. *beliefs* — мнение, убеждения, представления, вера.

В качестве примера рассмотрим игру, изображенную на Рис. 7.7(a). Это развернутая форма простой статической игры. Если Игрок 2 ожидает, что Игрок 1 выберет стратегию R, то он должен ожидать также, что будет находиться в правой вершине своего информационного множества. Следует отметить, что если второй игрок будет исходить из сформированных таким способом ожиданий, то, выбирая свои действия оптимальным образом, он повторит ту функцию отклика, которую мы рассматривали при анализе равновесия Нэша.

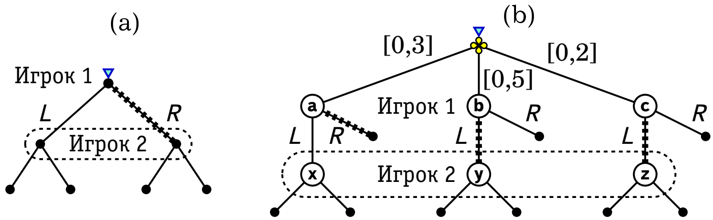


Рис. 7.7. Примеры вычисления представлений по стратегиям

Рассмотрим теперь игру, изображенную на Рис. 7.7(b). Пусть Игрок 1 использует стратегию (a:R, b:L, c:L). Эта игра включает случайный ход природы, поэтому представления здесь рассчитываются несколько более сложно. Вероятности следует пересматривать в соответствии с формулами условных вероятностей, рассмотренными нами в параграфе 1.8 «Байесовское принятие решений».

В данном случае вероятность того, что игра приведет в вершину x равна нулю, в вершину y — 0,5, а в вершину z — 0,2. Общая вероятность того, что игра приведет в информационное множество Игрока 2 равна 0,7. Эта вероятность не равна единице. Чтобы получить вероятности попадания в вершины информационного множества условные относительно факта попадания в это информационное множество, надо привести сумму вероятностей к единице, для чего поделить соответствующие безусловные вероятности на их сумму 0,7. Получим, что представления Игрока 2 в его информационном множестве должны иметь вид $\left(0; \frac{5}{7}; \frac{2}{7}\right)$.

Если рациональный игрок в информационном множестве имеет такого рода представления (ожидания), то на их основе он выберет такой план последующих действий, который может обеспечить ему наибольший ожидаемый выигрыш. Эти рассуждения приводят к по-

> Найдите представления Игрока 2 в игре, изображенной на Рис. 7.7(b), если Игрок 1 использует стратегии (a:L, b:R, c:L), (a:L, b:L, c:R) и (a:L, b:R, c:R).

нятию совершенного байесовского равновесия.

Совершенное байесовское равновесие состоит из двух компонент:

- профиля стратегий всех игроков,
- для каждого игрока в каждом информационном множестве, в котором ему принадлежит ход, его представления.

Для того, чтобы профиль стратегий и представления игроков составляли совершенное байесовское равновесие, необходимо выполнение следующих условий.

- Выбранная игроком стратегия последовательно оптимальна при данных представлениях и данных стратегиях остальных игроков.
- Представления каждого игрока согласуются там, где это возможно, с профилем стратегий.

Поясним эти условия.

Стратегия игрока является последовательно рациональной в данном информационном множестве, если ожидаемый выигрыш игрока максимален при данных представлениях и при данных стратегиях остальных игроков. Профиль стратегий является последовательно рациональным для данной системы представлений, если это выполнено для стратегии любого игрока в каждом его информационном множестве.

В каком смысле система представлений должна быть согласована с профилем стратегий, мы рассмотрели выше. Следует особо пояснить, что такое «где это возможно». Некоторые информационные множества в процессе игры будут достигаться с нулевой вероятностью при данном профиле стратегий, и для таких информационных множеств невозможно рассчитать условные вероятности попадания в вершины. Про такие информационные множества говорят, что они лежат вне равновесной траектории. Мы будем рассматривать только слабую концепцию совершенного байесовского равновесия, которая предписывает только, чтобы в информационных множествах вне равновесной траектории существовали *некоторые* представления. (Конечно, эти представления не могут быть совсем произвольными, поскольку вероятности должны быть неотрицательными и сумма их должна быть равна единице.)

Так если в игре, изображенной на Рис. 7.7(b), Игрок 1 использует стратегию (a:R, b:R, c:R), то информационное множество Игрока 2 лежит вне траектории игры (достигается с вероятностью 0) и предпочтения там не определены.

Совершенное байесовское равновесие предоставляет возможности для анализа не только игр с неполной информацией, но и игр с несовершенной информацией. Поскольку игры с несовершенной информацией имеют похожую структуру (включают отсутствие информации и моделирование ожиданий), то могут использоваться аналогичные приемы анализа. Действительно, неважно, из-за чего возникло информационное множество — из-за ненаблюдаемого случайного хода природы или из-за ненаблюдаемых ходов других игроков. В любом случае можно потребовать, чтобы соответствующий игрок имел некоторые ожидания — распределение вероятностей на множестве вершин данного информационного множества.

Рассмотрим, как находить совершенное байесовское равновесие, на примере Игры 43 с развернутой формой, показанной на Рис. 5.8. Мы видели ранее, что в этой игре существуют «лишние» совершенные в подыграх равновесия.

Представления Фирмы 2 в ее информационном множестве можно задать с помощью вероятности β того, что она оказалась в левой вершине информационного множества (вероятности того, что Фирмы 1 выбрала *ва*, при условии, что она вошла). Для правой вершины вероятность соответственно равна $1-\beta$ (Рис. 7.8).

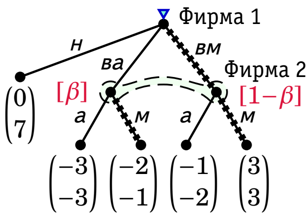


Рис. 7.8. Поиск совершенного байесовского равновесия Игры 43

Если Фирмы 2 имеет такие представления, то при выборе агрессивной политики (*а*) ее ожидаемый выигрыш составит

$$\beta \cdot (-3) + (1-\beta) \cdot (-2) = -\beta - 2,$$

а при выборе миролюбивой политики (*м*) —

$$\beta \cdot (-1) + (1-\beta) \cdot 3 = 3 - 4\beta.$$

Фирма 2 выберет *а*, только если $-\beta - 2 \geq 3 - 4\beta$, т. е. только если $\beta \geq 5/3$. Вероятность не может превышать единице, поэтому Фирма 2 выберет *м* вне зависимости от стратегии Фирмы 1.

Далее, оптимальным откликом Фирмы 1 на то, что Фирма 2 ведет себя миролюбиво, является вход в отрасль и миролюбивое поведение (*вм*), поскольку при этом ее выигрыш максимален ($3 > -2$ и $3 > 0$).

При такой стратегии Фирмы 1 Фирма 2 должна ожидать, что она находится в правой вершине, т. е. $\beta = 0$. Мы нашли совершенное байесовское равновесие в этой игре. Это профиль стратегий (*вм*, *м*) и представления, определяемые вероятностью $\beta = 0$.

В случае смешанных стратегий общего вида рассуждения должны быть похожими. Следует вычислить, с какой вероятностью будет достигаться каждая из вершин некоторого информационного множества в процессе игры, если игра будет происходить в соответствии с данным профилем стратегий. Тогда вероятность того, что игрок может находиться в некоторой вершине рассматриваемого информационного множества, равна вероятности достижения этой вершины деленной на сумму вероятностей достижения вершин рассматриваемого информационного множества. Указанная сумма вероятностей есть просто вероятность достижения рассматриваемого информационного множества. Понятно, что эта вероятность не должна быть равна нулю, чтобы можно было произвести деление. (Если же вероятность равна нулю, т. е. данное информационное множество не может быть достигнуто, то указанное правило не применимо.)

Описанный способ вычисления вероятностей соответствует обычным правилам для условных вероятностей. Пусть событие B_j означает, что процесс игры привел в определенную вершину информационного множества ($j = 1, \ldots, m$), а событие — A, что процесс игры привел в это информационное множество (в одну из вершин). Тогда вероятность события B_j при условии события A равна

$$\mathbf{P}\{B_j \mid A\} = \frac{\mathbf{P}B_j}{\mathbf{P}A},$$

где $\mathbf{P}\{A\} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}\{B_k\}$. Чтобы можно было применить эту формулу, нужно чтобы знаменатель не был равен нулю ($\mathbf{P}\{A\} \neq 0$).

Поясним сказанное на примере дерева, изображенного на Рис. 7.9(а). Если третий игрок считает, что первый игрок выбирает левую ветвь с вероятностью 0,4, и что второй игрок выбирает левую и правую ветви с равными вероятностями, то он должен считать, что вершина c будет достигаться в процессе игры с вероятностью $0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2$, а вершина d — с вероятностью 0,6. Таким образом, он должен сопоставить вершине c вероятность

$$\frac{0{,}2}{0{,}2+0{,}6} = 0{,}25,$$

а вершине d — вероятность

$$\frac{0{,}6}{0{,}2+0{,}6} = 0{,}75.$$

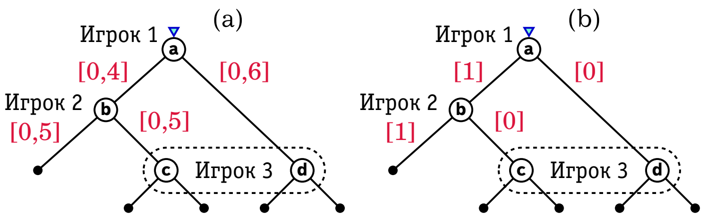


Рис. 7.9. (a) Игрок 3 должен сопоставить вершинам c и d вероятности 0,25 и 0,75 соответственно. (b) Ожидания Игрока 3 могут быть произвольными

Как уже говорилось, не всегда можно по данному набору стратегий сформировать представления. Например, в игре изображенной на Рис. 7.9(b), при указанных о стратегиях Игроков 1 и 2 Игрок 3 не может сформировать представлений в своем информационном множестве. Игрок 3 может получить ход только в результате ошибок Игроков 1 и 2, и трудно судить, какая из ошибок более вероятна.

Если в игре нет подыгр, то совершенное байесовское равновесие приходится находить как решение системы соотношений: представления в информационных множествах находятся в соответствии с равновесным профилем стратегий, а равновесная стратегия выбирается каждым игроком на основе представлений в информационных множествах и равновесных стратегий других игроков.

Рассмотрим пример нахождения совершенного байесовского равновесия в смешанных стратегиях.

Игра 50: Студент может готовиться к зачету или не готовиться. На зачете преподаватель дает студенту одну задачу. Вероятность решить задачу равна 90% для студента, который готовился, и 10% для студента, который не готовился. По результатам решения задачи преподаватель может поставить зачет или не ставить. Само по себе решение задачи не важно ни студенту, ни преподавателю. Если студент готовился и получил зачет, то выигрыш студента равен 1, а выигрыш преподавателя равен 2. Если студент готовился и не получил зачет, то выигрыш студента равен −1, а выигрыш преподавателя равен −1. Если студент не готовился и получил зачет, то выигрыш студента равен 2, а выигрыш преподавателя равен 0. Если студент не готовился и не получил зачет, то выигрыш студента равен 0, а выигрыш преподавателя равен 1. ⊙

Дерево Игры 50 изображена на Рис. 7.10. На дереве *г* означает «готовиться», *нг* — «не готовиться», *р* — «решает задачу», *нр* — «не решает», *з* — «зачет», *нз* — «незачет».

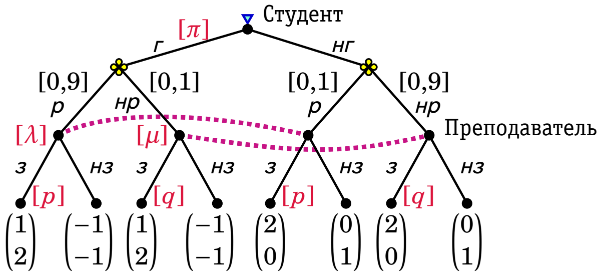


Рис. 7.10. Поиск совершенного байесовского равновесия Игры 50

Обозначим через π вероятность того, что студент готовится (*г*), через p вероятность того, что преподаватель ставит зачет, если студент решил задачу, а через q вероятность того, что преподаватель ставит зачет, если студент не решил задачу. Пусть кроме того λ — вероятность, что студент готовился к зачету при условии, что он решил задачу, а μ вероятность, что студент готовился к зачету при условии, что он не решил задачу. Вероятности λ и μ задают представления преподавателя в двух его информационных множествах.

Если студент готовится к зачету, то его ожидаемая полезность равна

$$0{,}9(p\cdot 1+(1-p)\cdot(-1))+0{,}1(q\cdot 1+(1-q)\cdot(-1))=0{,}9(2p-1)+0{,}1(2q-1)=$$
$$=1{,}8p+0{,}2q-1.$$

Если студент не готовится к зачету, то его ожидаемая полезность равна

$$0{,}1(p\cdot 2+(1-p)\cdot 0)+0{,}9(q\cdot 2+(1-q)\cdot 0)=0{,}2p+1{,}8q.$$

Студенту безразлично, готовиться или нет, при

$$1{,}8p+0{,}2q-1=0{,}2p+1{,}8q,$$

т. е. при $p=q+5/8$. Если студенту безразлично, то он может выбрать любую вероятность $\pi\in[0;1]$. При $p>q+5/8$ (т. е. когда результаты решения задачи достаточно существенно влияют на вероятность получения зачета) студенту выгоднее готовиться к зачету ($\pi=1$). При $p<q+5/8$ ему выгодно не готовиться ($\pi=0$). В целом получаем следующий оптимальный отклик студента:

$$\pi(p,q)=\begin{cases}1, & p>q+5/8,\\ [0;1], & p=q+5/8,\\ 0, & p<q+5/8.\end{cases}$$

Рассмотрим теперь представления преподавателя в его информационных множествах. Вероятность того, что студент готовился *и* решил задачу равна $\pi\cdot 0{,}9$. Вероятность того, что студент не готовился *и* решил задачу равна $(1-\pi)\cdot 0{,}1$. Общая вероятность того, что студент решил задачу (т. е. вероятность того, что игра приведет в левое информационное множество) равна $\pi\cdot 0{,}9+(1-\pi)\cdot 0{,}1$. Таким образом, в левом информационном множестве вероятность левой вершины (вероятность того, что студент готовился, при том, что он решил задачу) равна

$$\lambda(\pi)=\frac{\pi\cdot 0{,}9}{\pi\cdot 0{,}9+(1-\pi)\cdot 0{,}1}=\frac{9\pi}{1+8\pi}.$$

Аналогичным образом вычисляется вероятность левой вершины в правом информационном множестве (вероятность того, что студент готовился, при том, что он не решил задачу):

$$\mu(\pi)=\frac{\pi\cdot 0{,}1}{\pi\cdot 0{,}1+(1-\pi)\cdot 0{,}9}=\frac{\pi}{9-8\pi}.$$

Пусть студент решил задачу (преподаватель находится в левом информационном множестве). При данных представлениях $(\lambda, 1-\lambda)$ ожидаемая полезность преподавателя, если он поставит зачет, равна

$$\lambda \cdot 2 + (1-\lambda) \cdot 0 = 2\lambda.$$

Если он не поставит зачет, то ожидаемая полезность равна

$$\lambda \cdot (-1) + (1-\lambda) \cdot 1 = 1 - 2\lambda.$$

Преподавателю безразлично, ставить или не ставить зачет, при

$$2\lambda = 1 - 2\lambda,$$

т. е. при $\lambda = 1/4$. При $\lambda > 1/4$ преподавателю выгоднее поставить зачет. В целом оптимальные действия преподавателя имеют следующий вид:

$$p(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda > 1/4, \\ [0;1], & \lambda = 1/4, \\ 0, & \lambda < 1/4. \end{cases}$$

Если студент не решил задачу (преподаватель находится в правом информационном множестве), то рассуждения аналогичны, только надо λ заменить на μ. Оптимальные действия преподавателя имеют такой же вид:

$$q(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu > 1/4, \\ [0;1], & \mu = 1/4, \\ 0, & \mu < 1/4. \end{cases}$$

Мы нашли систему соотношений, определяющих совершенное байесовское равновесие. Решение этой системы будем искать перебором.

Пусть студент наверняка готовится, т. е. $\pi = 1$. Тогда преподаватель вне зависимости от результата решения задачи считает, что студент готовился, т. е. $\lambda = 1$ и $\mu = 1$. При таких представлениях преподаватель в любом случае ставит зачет, т. е. $p = 1$ и $q = 1$. Однако, если преподаватель в любом случае ставит зачет, то студенту не выгодно готовиться ($\pi = 0$). Такого не может быть в равновесии.

Если студент наверняка не готовится, т. е. $\pi = 0$, то преподаватель вне зависимости от результата решения задачи считает, что студент не готовился, т. е. $\lambda = 0$ и $\mu = 0$. При таких представлениях преподаватель в любом случае не ставит зачет, т. е. $p = 0$ и $q = 0$. Поскольку преподаватель в любом случае не ставит зачет, то студент действительно не будет готовиться. Мы нашли одно из равновесий. Это равновесие в чистых стратегиях.

Разберем теперь случай, когда студент использует вполне смешанную стратегию, т. е. $\pi \in (0;1)$. Такое может быть только если студенту все равно, готовиться или нет, т. е. если $p = q + 5/8$. Очевидно, что при этом $p > 0$ и $q < 1$. Можно выделить два возможных случая: $q \in (0;1)$ и $q = 0$.

Пусть студент использует вполне смешанную стратегию ($\pi \in (0;1)$) и преподаватель точно не ставит зачет, если студент не решил задачу ($q = 0$). Чтобы такое было в равновесии, преподаватель должен рандомизировать, если студент решил задачу, поскольку должно выполняться $p = 0 + 5/8 = 5/8$. Такая рандомизация выгодна преподавателю, только если ему все равно, т. е. если $\lambda = 1/4$. Преподаватель будет иметь такие представления в левом информационном множестве только при

$$\frac{9\pi}{1+8\pi} = \frac{1}{4},$$

т. е. при $\pi = 1/28$. Тогда в правом информационном множестве

$$\mu = \frac{\pi}{9-8\pi} = \frac{1}{244}.$$

Поскольку $\mu < 1/4$, преподавателю действительно не выгодно ставить зачет, если студент не решил задачу. Значит, мы нашли еще одно равновесие.

Пусть теперь студент использует вполне смешанную стратегию ($\pi \in (0;1)$) и преподаватель рандомизирует, если студент не решил задачу ($q \in (0;1)$). Такая рандомизация выгодна преподавателю, только если ему все равно, т. е. если $\mu = 1/4$. Преподаватель будет иметь такие представления в правом информационном множестве только при

$$\frac{\pi}{9-8\pi} = \frac{1}{4},$$

т. е. при $\pi = 3/4$. Тогда в левом информационном множестве

$$\lambda = \frac{9\pi}{1+8\pi} = \frac{27}{28},$$

Поскольку $\lambda > 1/4$, преподавателю выгодно всегда ставить зачет, если студент решил задачу, т. е. $p = 1$. Отсюда $q = 1 - 5/8 = 3/8$, т. е. студент действительно рандомизирует. Значит, мы нашли третье равновесие.

Таким образом, мы нашли три совершенных байесовских равновесия со следующими параметрами:

$$\pi = 0, \quad \lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad p = 0, \quad q = 0,$$

$$\pi = \frac{1}{28}, \quad \lambda = \frac{1}{4}, \quad \mu = \frac{1}{244}, \quad p = \frac{5}{8}, \quad q = 0$$

и

$$\pi = \frac{3}{4}, \quad \lambda = \frac{27}{28}, \quad \mu = \frac{1}{4}, \quad p = 1, \quad q = \frac{3}{8}.$$

Заметим, что в данном случае множество совершенных байесовских равновесий совпадает с множеством равновесий Нэша.

> Представьте Игру 50 в нормальной (стратегической) форме. Покажите, что одна из чистых стратегий преподавателя является строго доминируемой. Отбросьте эту стратегию и найдите все равновесия Нэша в смешанных стратегиях получившейся игры. Проверьте, что множество равновесий Нэша такое же, как и множество совершенных байесовских равновесий (с точностью до различия между смешанными и поведенческими стратегиями).
>
> ?

7.4. Сок или пиво. Интуитивный критерий

В Игре 50 при любом поведении студента оба информационных множества преподавателя достигаются с ненулевой вероятностью. В связи с этим не возникает сложностей с вычислением представлений в этих информационных множествах.

Рассмотрим игру, в которой есть информационные множества, которые при некоторых стратегиях достигаются с нулевой вероятностью и поэтому в них невозможно сформировать ожидания однозначно. В этой игре имеются «лишние» совершенные байесовские равновесия.

Игра 51: Игрок 1 — это случайный посетитель бара. Он может быть одного из двух типов — сильным или слабым. Если Игрок 1 сильный, то он предпочитает пиво, а если слабый — то сок. Сильным Игрок 1 бывает с вероятностью 90%. Игрок 2 — постоянный посетитель бара и задира. Он получает удовольствие, если подерется со слабым Игроком 1. В то же время, он предпочитает не связываться с сильным

Игроком 1. Игрок 1 знает, какого он типа, а Игрок 2 не знает, какого типа Игрок 1.

Исходный выигрыш Игрока 1 равен 20. Он уменьшается на 10, если игрок пьет нелюбимый напиток. Кроме того, выигрыш уменьшается на 20, если с игроком дерутся.

Исходный выигрыш Игрока 2 равен 10. Он увеличивается на 10, если игрок дерется со слабым и уменьшается на 10, если игрок дерется с сильным.

Дерево игры представлено на Рис. 7.11. ⊙

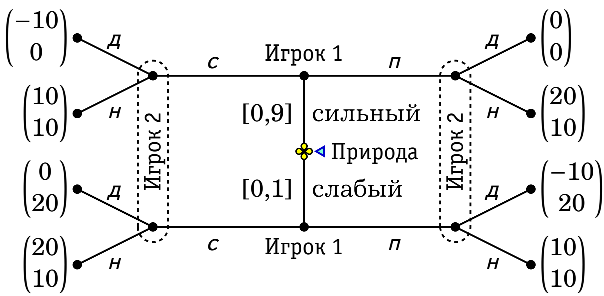


Рис. 7.11. Дерево Игры 51 «Сок или пиво»

Сначала мы представим эту игру в нормальной форме и найдем в ней все равновесия Нэша, а потом рассмотрим, какие из них являются совершенными байесовскими равновесиями.

Какие стратегии имеются у Игрока 1? Стратегия должна иметь следующий вид: если сильный то пить сок или пиво, и если слабый пить сок или пиво. Следовательно, всего Игрок 1 имеет четыре стратегии, которые можно обозначить следующим образом: (*с*, *с*), (*с*, *п*), (*п*, *с*), (*п*, *п*).

Стратегия Игрока 2 обусловлена наблюдаемой им информацией: пьет ли Игрок 1 сок или пиво. Таким образом, стратегия Игрока 2 должна предусматривать его действия (драться — *д* и не драться — *н*) в случае, когда он наблюдает сок и в случае, когда он наблюдает пиво. Игрок 2 имеет четыре стратегии, которые можно обозначить следующим образом: (*д*, *д*), (*д*, *н*), (*н*, *д*), (*н*, *н*). Например применение стратегии (*н*, *д*) означает, что Игрок 2 не дерется, если видит сок и дерется, если видит пиво.

Для того чтобы заполнить матрицу нормальной формы, требуется вычислить ожидаемые выигрыши Игрока 2 в зависимости от того, дерется ли он с сильным Игроком 1, и дерется ли он со слабым Игроком 1 (Таблица 7.3). С кем именно будет драться Игрок 2, зависит от его стратегии и от стратегии Игрока 1. Например, если сильный Игрок 1 пьет пиво, а слабый — сок, т. е. используется стратегия (*п*, *с*), а Игрок 2 выбрал стратегию (*н*, *д*), то Игрок 2 будет драться с сильным Игроком 1 и не будет драться со слабым Игроком 1, так что его ожидаемый выигрыш составит 1.

Таблица 7.3. Расчет ожидаемых выигрышей Игрока 1

С сильным	Со слабым	Ожидаемый выигрыш
д	*д*	$0\cdot 0{,}9+20\cdot 0{,}1=2$
д	*н*	$0\cdot 0{,}9+10\cdot 0{,}1=1$
н	*д*	$10\cdot 0{,}9+20\cdot 0{,}1=11$
н	*н*	$10\cdot 0{,}9+10\cdot 0{,}1=10$

Рассуждая таким образом, мы можем найти выигрыши Игрока 2 при всех возможных профилях стратегий. Выигрыши двух типов Игрока 1 в зависимости от профиля стратегий найти несложно, пользуясь деревом игры. Например, как уже говорилось, при профиле стратегий ((*п*, *с*), (*н*, *д*)) Игрок 2 будет драться с сильным Игроком 1 и не будет драться со слабым Игроком 1. При этом сильный Игрок 1 получит выигрыш 0, а слабый — выигрыш 20. Эти рассуждения позволяют нам получить нормальную форму игры (см. Таблицу 7.4).

Таблица 7.4. Нормальная форма Игры 51

Игрок 1 (сильн., слаб.) \ Игрок 2 (с, п)	*д, д*	*д, н*	*н, д*	*н, н*
с, с	2 $(-10;\underline{0})$	2 $(-10;0)$	$\underline{10}$ $(\underline{10};\underline{20})$	$\underline{10}$ $(10;\underline{20})$
с, п	2 $(-10;-10)$	1 $(-10;\underline{10})$	$\underline{11}$ $(\underline{10};-10)$	10 $(10;10)$
п, с	2 $(\underline{0};\underline{0})$	$\underline{11}$ $(\underline{20};0)$	1 $(0;\underline{20})$	10 $(\underline{20};\underline{20})$
п, п	2 $(\underline{0};-10)$	$\underline{10}$ $(\underline{20};\underline{10})$	2 $(0;-10)$	$\underline{10}$ $(\underline{20};10)$

В Таблице 7.4 оптимальные отклики указаны подчеркиванием выигрышей. В игре есть два равновесия Нэша. Оба равновесия являются *объединяющими*, поскольку в этих равновесиях оба типа Игрока 1 ведут себя одинаково (пьют один и тот же напиток). В обоих равновесиях если Игрок 2 видит «неравновесный» напиток, то он вступает в драку. Если же Игрок 2 видит «равновесный» напиток, то он не вступает в драку. Равновесия показаны на Рис. 7.12.

Оба равновесия — совершенные байесовские. Действительно, можно подобрать представления Игрока 2 в обоих информационных множествах, которые будут соответствовать данным равновесиям. Обозначим через μ вероятность того, что Игрок 1 является сильным при том, что он пьет «неравновесный» напиток. При каких условиях на μ представления $(\mu, 1-\mu)$ соответствуют равновесию?

Рассмотрим равновесие, в котором оба типа Игрока 1 пьют пиво. Если Игрок 2, видя, что Игрок 1 пьет сок, и имея представления $(\mu, 1-\mu)$, выберет драку, то его ожидаемый выигрыш будет равен

$$\mu \cdot 0 + (1-\mu) \cdot 20 = 20 - 20\mu.$$

Если он не будет драться, то ожидаемый выигрыш будет равен 10. Чтобы Игрок 2 дрался, видя сок, требуется, чтобы вероятность μ удовлетворяла следующим условиям:

$$20 - 20\mu \geq 10$$

или $\mu \leq 1/2$. Для второго равновесия, в котором оба типа Игрока 1 пьют сок, рассуждения аналогичные и условия на μ точно такие же.

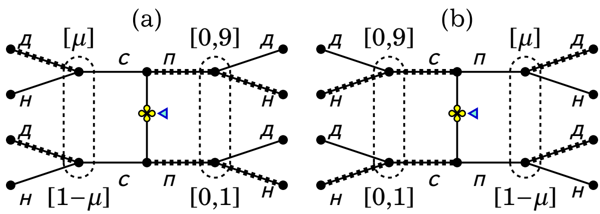


Рис. 7.12. Два равновесия Игры 51 «Сок или пиво»

Равновесие, в котором оба типа Игрока 1 пьют сок, кажется неестественным. Неестественность этого равновесия связана с не очень правдоподобными представлениями Игрока 2 в том случае, когда он наблюдает пиво. Для исключения подобных равновесий Чо и

Крепс придумали так называемый **интуитивный критерий**[2]. Рассмотрим этот критерий на примере данного равновесия.

Слабый игрок пьет сок и имеет 20 в равновесии. Если отклонится и выпьет пива, то получит -10 и 10. В любом случае это меньше, чем 20. Он не станет отклоняться. Сильный игрок пьет сок и имеет 10 в равновесии. Если отклонится и выпьет пиво, то получит 0 или 20. Он может надеяться изменить представления Игрока 2 и убедить того, что он сильный. То есть потенциально он (в отличие от слабого) может отклониться. Следовательно, Игрок 2 должен при виде Игрока 1, пьющего пиво, сделать вывод, что тот сильный, т. е. что $\mu = 1$. При этом лучше не драться. Но если Игрок 2 при виде пива не будет драться, то сильному Игроку 1 действительно выгодно пить пиво.

Можно представить, что сильный Игрок 1 демонстративно пьет пиво и тем самым как бы произносит следующую речь, обращенную к Игроку 2:

> Я сильный. Чтобы это доказать, я выпью пиво вместо сока. Подумай, если бы я был слабым, то мне в любом случае не выгодно было бы пить пиво вместо сока, даже если бы это убедило тебя, что я сильный. В то же время, если я сильный, то мне выгодно пить пиво вместо сока, коль скоро это убедит тебя, что я сильный.

Первое из равновесий удовлетворяет интуитивному критерию — никакому из типов Игрока 1 не выгодно переубеждать Игрока 2.

> Рассмотрите модификацию Игры 51, в которой сильный Игрок 1 предпочитает драться.
>
> Будет ли существовать равновесие, в котором сильный Игрок 1 будет пить сок с целью притвориться слабым и получить удовольствие от драки?
>
> **?**

---

[2] См. [8]

Литература

[1] Маленво Э. Лекции по микроэкономическому анализу.— М.: Наука, 1985.

[2] Мулен, Э. Теория игр с примерами из математической экономики.— М.: Мир, 1985.

[3] Нейман, Дж. фон К теории стратегических игр.— В кн.: Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961.

[4] Нейман, Дж. фон, Моргенштерн, О. Теория игр и экономическое поведение.— Наука, 1970.

[5] Нэш Дж. Бескоалиционные игры.— В кн.: Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961.

[6] Оуэн Г. Теория игр.— М.: Мир, 1971.

[7] Экланд И. Элементы математической экономики.— Мир, 1983.

[8] Cho I., Kreps D. Signaling Games and Stable Equilibria.— The Quarterly Journal of Economics, 1987, 102, №2, 179—221.

[9] Harsanyi J. C. Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players (parts I, II and III).— Management Science, 1967-1968, 14, 159—182, 320—334, 486—502.

[10] Kuhn H. W. Extensive Games and the Problem of Information.— In: Contributions to the Theory of Games. Princeton University Press, 1953, 193—216.

[11] Miller J. Game Theory at Work: How to Use Game Theory to Outthink and Outmaneuver Your Competition.— McGraw-Hill, 2003.

[12] Nash, J. F. The Bargaining Problem.— Econometrica, 1950, 18, 155—162.

[13] Nash J. F. Non-Cooperative Games.— Annals of Mathematics, 1951, 54, 286—295.

[14] Neumann J. von. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele.— Mathematische Annalen, 1928, 100, 295—320.

[15] Rubinstein A. Perfect Equilibrium in a Bargaining Model.— Econometrica, 1982, 50, 97—109.

[16] Schelling T. The Strategy of Conflict.— Harvard University Press, 1960.